

**UNIVERSIDADE NOVA DE LISBOA**  
**Faculdade de Ciências e Tecnologia**  
**Departamento de Engenharia Civil**

**Formulação Fisicamente não - Linear da  
Teoria Generalizada de Vigas**

Por  
**Inês Isabel Cunha dos Santos Gaspar de Freitas**

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Civil

Orientador: Rodrigo de Moura Gonçalves

**Júri**

Arguente: Nome do Arguente  
Vogais: Nome do Vogal 1  
Nome do Vogal 2

Mês de 2011



“Copyright” Inês Isabel Cunha dos Santos Gaspar de Freitas, FCT/UNL e UNL

A Faculdade de Ciências e Tecnologia e a Universidade Nova de Lisboa têm o direito, perpétuo e sem limites geográficos, de arquivar e publicar esta dissertação através de exemplares impressos reproduzidos em papel ou de forma digital, ou por qualquer outro meio conhecido ou que venha a ser inventado, e de a divulgar através de repositórios científicos e de admitir a sua cópia e distribuição com objectivos educacionais ou de investigação, não comerciais, desde que seja dado crédito ao autor e editor.



# Agradecimentos

A presente dissertação conclui uma etapa importante tanto a nível do meu percurso académico como a nível do meu crescimento pessoal. Não podia, por isso, deixar de agradecer a todos os que me têm acompanhado, ajudado e participado na *construção* das várias fases da minha vida e que muito têm contribuído para o desenvolvimento do meu futuro.

Começo por agradecer ao Professor Doutor Rodrigo de Moura Gonçalves, meu orientador, toda a cooperação e a disponibilidade bem como a paciência e o empenho que sempre demonstrou ter ao longo deste trabalho. Foi gratificante ter tido a oportunidade de trabalhar e aprender com alguém que considero ter um vasto leque de conhecimentos e ser um exemplo de competência e rigor. Também reconheço que ao meu orientador devo a compreensão, o apoio e as palavras de motivação que foram importantes em momentos em que estive menos *resistente*.

Agradeço à minha família por ter sido continuamente o meu *apoio fixo* e a minha *estrutura de suporte*. Principalmente à minha mãe, pela fé, que sempre me ajudou a ter força quando mais precisei; ao meu pai pelo seu afecto e apoio “técnico” que me ajudou tantas vezes a esclarecer algumas dúvidas “existenciais”; ao meu irmão por às vezes ter tido que *programar* algum do seu tempo para me ajudar; à minha irmã por estar sempre disponível para me ouvir e por ter sido com ela que *descarreguei* alguns *momentos* de maior *tensão* e, por fim, aos meus avós, por terem estado sempre presentes. Um profundo agradecimento e consciencialização de que foi o vosso apoio e amor incondicional que me têm ajudado sempre ao longo da minha vida e que me tem feito chegar mais longe de cada vez. Aos meus amigos em geral e em particular à minha melhor amiga e à restante família, obrigada por acreditarem sempre em mim e por acharem que sou capaz!

Às Doutoras Tânia Carneiro e Jennifer Santos obrigada pelo vosso trabalho, que mesmo que indirectamente, me ajudou a concluir esta etapa. Ao amigo engenheiro João Guterres pela disponibilidade e por ter sempre uma palavra amiga.

Às minhas amigas e colegas de curso, JMR, ASA, ASR, AMCS e AMBM, que me acompanharam nesta caminhada entre aço e betão, agradeço as *dinâmicas* ocasiões de boa disposição e de *descompressão* mas também a *compatibilidade* nas situações de maior *esforço* e *pressão*. A *coesão* que sempre tivemos permitiu *consolidar* uma boa amizade, que será o *ligante* que nos manterá *agregadas* fora da faculdade.

E finalmente, ao João por ser um *pilar* fundamental na minha vida. Por ter estado permanentemente ao meu lado, por me ter ajudado a *resistir* mesmo quando estava prestes a *ceder* em situações de maior *fadiga* e *tensão*, pela tolerância e amizade e por nunca me ter deixado entrar em *rotura* nem *colapsar*. Obrigada pelo carinho, compreensão e cumplicidade.



# Resumo

Nesta tese contribui-se para o desenvolvimento da Teoria Generalizada de Vigas (“Generalised Beam Theory” - GBT), a qual constitui uma alternativa bastante vantajosa aos métodos numéricos “clássicos” de análise estrutural de vigas de parede fina com secção deformável: faixas finitas e elementos finitos de casca.

Em particular, desenvolvem-se e implementam-se elementos finitos de barra fisicamente não-lineares (embora segundo a hipótese da linearidade geométrica) baseados na GBT. Consideram-se funções de interpolação de Lagrange (lineares) e Hermite (cúbicas). São apresentados exemplos que ilustram as vantagens associadas à utilização dos elementos finitos propostos, mostrando-se que conduzem a uma precisão elevada com um número reduzido de graus de liberdade. Para validar os resultados obtidos com a GBT, recorre-se a resultados obtidos através de análises com elementos finitos bidimensionais e de casca, executadas no programa ADINA.

## **Palavras chave:**

Teoria generalizada de vigas  
Materiais elastopásticos  
Barras de parede fina  
Deformação da secção





# Abstract

## **Physically non-linear Generalised Beam Theory**

This thesis contributes to the development of the Generalised Beam Theory (GBT), which constitutes a rather advantageous alternative to the “classical” structural analysis methods of thin-walled members: finite strip or shell finite element methods.

This work presents the development, implementation and validation of physically non-linear finite elements based on GBT (although according to the geometrically linear theory). Lagrange (linear) and Hermite (cubic) interpolation functions are employed. Examples that illustrate the advantages associated with the use of the proposed finite elements are presented, showing that they lead to accurate results with a reduced number of degrees of freedom. In order to validate the solutions obtained with the GBT, results obtained with plane and shell finite elements are employed, using ADINA software.

### **Keywords:**

Generalised Beam Theory  
Elastoplastic materials  
Thin-walled bars  
Cross-section deformation



# Índice de Matérias

Índice de Matérias	ix
Índice de Figuras	xi
Índice de Tabelas	xiii
Lista de abreviaturas, siglas e símbolos	xv
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Considerações gerais . . . . .	1
1.2 Motivação e objectivos . . . . .	3
1.3 Organização da Dissertação . . . . .	4
1.4 Publicações . . . . .	4
<b>2 Equações fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT)</b>	<b>7</b>
2.1 Descrição cinemática . . . . .	7
2.2 Tensões . . . . .	11
2.3 Hipóteses simplificativas adicionais . . . . .	11
2.4 Equações da GBT . . . . .	12
<b>3 Relações Constitutivas</b>	<b>15</b>
3.1 Materiais elásticos . . . . .	15
3.2 Materiais elastoplásticos . . . . .	15
<b>4 Implementação de um elemento finito</b>	<b>19</b>
4.1 Discretização e interpolação . . . . .	19
4.2 Equações discretizadas . . . . .	25
4.3 Aspectos computacionais . . . . .	27
4.3.1 Obtenção da matriz de rigidez tangente global e dos vectores das forças equivalentes e forças internas globais . . . . .	27
4.3.2 Estratégia incremental/ iterativa — método de Newton-Raphson . . . .	30

4.3.3	Algoritmo de retorno à superfície de cedência — Backward Euler e determinação do operador tangente consistente . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Exemplos ilustrativos</b>	<b>33</b>
5.1	Introdução . . . . .	33
5.2	Secção transversal com uma parede . . . . .	33
5.2.1	<b>Consola longa</b> — $L = 1,5 \text{ m}$ . . . . .	35
5.2.2	<b>Consola curta</b> — $L = 0,2 \text{ m}$ . . . . .	38
5.3	Secção transversal em «I» . . . . .	43
5.3.1	<b>Deslocamentos</b> . . . . .	46
5.3.2	<b>Participação Modal</b> . . . . .	47
5.3.3	<b>Tensões</b> . . . . .	51
<b>6</b>	<b>Conclusões e desenvolvimentos futuros</b>	<b>55</b>
6.1	Conclusões . . . . .	55
6.2	Desenvolvimentos futuros . . . . .	56
	<b>Bibliografia</b>	<b>57</b>
<b>A</b>	<b>Tabelas</b>	<b>59</b>
<b>B</b>	<b>Rotinas desenvolvidas no programa MAPLE</b>	<b>65</b>
B.1	Procedimento para calcular a matriz de rigidez tangente (para a 1ª iteração) . . . . .	65
B.2	Procedimento para calcular a matriz de rigidez tangente e calcular o vector das forças equivalentes . . . . .	66
B.3	Dados e características do problema . . . . .	67
B.4	Ciclo incremental-iterativo: . . . . .	69

# Índice de Figuras

1.1	Discretização segundo o MFF e a GBT ( $\alpha_i$ e $\beta_i$ são amplitudes) (extraído de Silvestre, 2005) . . . . .	2
1.2	Modos de deformação da GBT e participação modal de uma coluna simplesmente apoiada com secção em C (extraído de Gonçalves, 2007). . . . .	3
2.1	Eixos locais das paredes de uma secção de parede fina arbitrária e componentes do campo de deslocamentos (extraído de Gonçalves <i>et al.</i> , 2011) . . . . .	7
2.2	Representação da hipótese de kirchhoff . . . . .	9
2.3	Configurações indeformada e deformada de uma placa (extraído de Silvestre, 2005) . . . . .	9
2.4	Deslocamento axial numa placa: decomposição nas parcelas de membrana e flexão (extraído de Silvestre, 2005) . . . . .	10
4.1	Modos de deformação de uma secção em Z (extraído de Silvestre, 2005) . . . . .	20
4.2	Modos de deformação de uma a) secção rectangular tubular e b) de uma secção em «hat» (extraído de Gonçalves, 2007 e Gonçalves <i>et al.</i> , 2010) . . . . .	21
4.3	Modos de deformação de uma ponte mista aço–betão (extraído de Gonçalves <i>et al.</i> , 2010) . . . . .	22
4.4	Modos de deformação de uma parede (a) com nós intermédios e (b) sem nós intermédios (extraído de Gonçalves <i>et al.</i> , 2011) . . . . .	23
4.5	Funções de interpolação de Lagrange (lineares) . . . . .	24
4.6	Funções de interpolação de Hermite . . . . .	25
4.7	Montagem de $\mathbf{K}_t$ , $\mathbf{F}$ e $\mathbf{Q}$ para uma discretização da barra com 3 elementos finitos . . . . .	28
4.8	Representação da discretização longitudinal da barra ao longo da sua linha média para $ne = 3$ . . . . .	29
4.9	Representação gráfica do método de Newton-Raphson (para o 1º incremento de carga e para 3 iterações) . . . . .	30
5.1	Representação da geometria das consolas a) longa, b) curta e c) da respectiva secção transversal . . . . .	34
5.2	Representação dos modos de deformação para os elementos finitos de Hermite para a secção com uma parede . . . . .	35

## Índice de Figuras

---

5.3	Representação da malha de elementos finitos e da deformada obtidas com o programa ADINA para as consolas a) longa e b) curta . . . . .	36
5.4	Consola longa com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange . . . . .	37
5.5	Consola longa com secção rectangular: elementos finitos de Hermite . . . . .	38
5.6	Consola longa com secção rectangular: resultados dos modelos mais refinados de elementos finitos de Lagrange . . . . .	38
5.7	Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange . . . . .	40
5.8	Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (para 1, 2 e 3 Modos) . . . . .	41
5.9	Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (para 4 Modos) . . . . .	42
5.10	Consola curta com secção rectangular: resultados dos modelos mais refinados de elementos finitos de Lagrange . . . . .	42
5.11	Consola curta com secção rectangular: resultados dos modelos mais refinados de elementos finitos de Hermite . . . . .	43
5.12	Consola com secção em «I»: geometria e comprimento . . . . .	44
5.13	Geometria da secção em «I» e respectiva simplificação de simetria/anti-simetria . . . . .	44
5.14	Primeiros 5 modos de deformação da secção em «I» considerados na análise da GBT . . . . .	45
5.15	Representação da malha de elementos finitos do programa ADINA (660 elementos finitos de casca) . . . . .	46
5.16	Comparação das soluções de elementos finitos: a) para 2 modos b) para 5 modos e c) para o conjunto das soluções com 2 e 5 modos . . . . .	48
5.17	Representação a) do perfil com secção em «I» e b) discretização da barra com 4 elementos finitos . . . . .	49
5.18	Expressões obtidas para a) os vectores de deslocamento generalizado $\mathbf{d}$ e b) as funções de amplitude modal $\phi_k$ para cada elemento finito e para 880 kN . . . . .	49
5.19	Representação da deformada final da barra com elementos finitos de casca (ADINA) obtida para o último nível de carga (880 kN) . . . . .	50
5.20	Representação das funções de participação modal dos primeiros 5 modos para 880 kN . . . . .	50
5.21	Tensões tangenciais no banzo com a) 2 e b) 3 modos de deformação . . . . .	52
5.22	Tensões tangenciais no banzo com a) 5 e b) 7 modos de deformação . . . . .	53

# Índice de Tabelas

A.1	Consola longa com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange . . . . .	60
A.2	Consola longa com secção rectangular: elementos finitos de Hermite . . . . .	61
A.3	Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange . . . . .	62
A.4	Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (1, 2 e 3 modos)	63
A.5	Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (4 modos) .	64





# Lista de abreviaturas, siglas e símbolos

## Abreviaturas

## Siglas

UNL	Universidade Nova de Lisboa
GBT	Generalised Beam Theory (Teoria Generalizada de Vigas)
MEF	Método dos Elementos Finitos
MFF	Método das Faixas Finitas
PTV	Princípio dos trabalhos virtuais
TPL	Teoria das peças lineares
EF	Elementos finitos

## Operadores especiais e índices

$\  \ $	norma de um vector ou tensor
$( )_{,k}$	derivada parcial em ordem a $k$
$( )_k$	referente a um modo de deformação $k$
$( )_e$	parcela elástica
$( )^F$	parcela de flexão
$( )^M$	parcela de membrana
$( )_p$	parcela plástica
$( )^t$	transposta
$( )_t$	tangente
$( )^{\mathcal{L}}$	referente às funções de interpolação de Lagrange
$( )^{\mathcal{H}}$	referente às funções de interpolação de Hermite
$d( )$	variação
$\Delta( )$	variação incremental ou iterativa
$\delta( )$	variação virtual

### Letras Latinas Maiúsculas

$C$  operador constitutivo elástico

$C_t$  operador constitutivo tangente

$C_{ct}$  operador constitutivo tangente consistente

$E$  módulo de elasticidade

$E_t$  módulo tangente

$G$  módulo de distorção

$H'$  módulo de endurecimento

$L$  comprimento de uma barra

$L_e$  comprimento de um elemento finito de barra

$N$  número total de modos de deformação da secção transversal

$U$  vector do campo de deslocamentos

$\bar{U}$  matriz dos modos de deformação

$A$  operador diferencial

$B$  largura dos banzos

$W_{ext}$  trabalho externo

$W_{int}$  trabalho interno

$K_e$  matriz de rigidez elementar

$K_t$  matriz de rigidez tangente global

$Q_e$  vector das forças internas elementar

$Q$  vector das forças internas global

$F_e$  vector das forças equivalentes ou externas elementar

$F$  vector das forças equivalentes ou externas global

$G$  forças desequilibradas

### Letras Latinas Minúsculas

$b$  largura de uma parede

$f$  função de cedência

$\mathbf{f}$  vector das cargas aplicadas na superfície média da barra

$h$  altura da secção

$t$  espessura de uma parede

$\mathbf{n}$  tensor normal à superfície de cedência

$\mathbf{d}$  vector dos deslocamentos nodais generalizados

$h_w$  altura da alma

$t_w$  espessura da alma

$t_f$  espessura dos banzos

### Letras Gregas

$\overline{\varepsilon_p}$  deformação plástica equivalente

$\varepsilon$  forma matricial ou vectorial do tensor das deformações

$\Phi$  matriz das funções de amplitude

$\phi_k$  função de amplitude do modo  $k$

$\gamma$  distorção

$d\gamma$  multiplicador plástico

$\kappa$  parâmetro de endurecimento

$\nu$  coeficiente de Poisson

$\theta$  rotação

$\sigma$  forma matricial ou vectorial do tensor das tensões

$\sigma_{ef}$  tensão efectiva

$\sigma_y$  tensão de cedência uniaxial

$\Omega$  superfície média da barra

$\Psi$  matriz das funções de interpolação

$\psi_i^H$  função de interpolação de Hermite

$\psi_i^L$  função de interpolação de Lagrange



# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Considerações gerais

A Teoria Generalizada de Vigas (ou GBT “Generalised Beam Theory”) deve a sua formulação a *Richard Schardt*, Professor na Universidade Técnica de Darmstadt (“Technische Hochschule Darmstadt”), que publicou o primeiro trabalho sobre esta teoria em 1966 (Schardt, 1966).

Segundo Schardt, os princípios fundamentais e orientadores do desenvolvimento da GBT devem-se a *Vlasov*. Nos seus trabalhos originais sobre a teoria da distorção de barras prismáticas de secção transversal fechada, Vlasov (1958) adoptou uma representação do campo de deslocamentos semelhante à que caracteriza a GBT, tendo designado este método por “método das coordenadas generalizadas”. Schardt tem desenvolvido e inspirado uma extensa e impressionante actividade de investigação sobre a GBT, que conduziu ao aparecimento de um grande número de publicações. Contudo, a consulta deste vasto conjunto de publicações não é de fácil acesso para muitos investigadores, principalmente por a maioria delas estarem escritas em alemão e constituírem relatórios técnicos e teses de doutoramento da Universidade Técnica de Darmstadt, sendo pouco disseminadas fora da Alemanha.

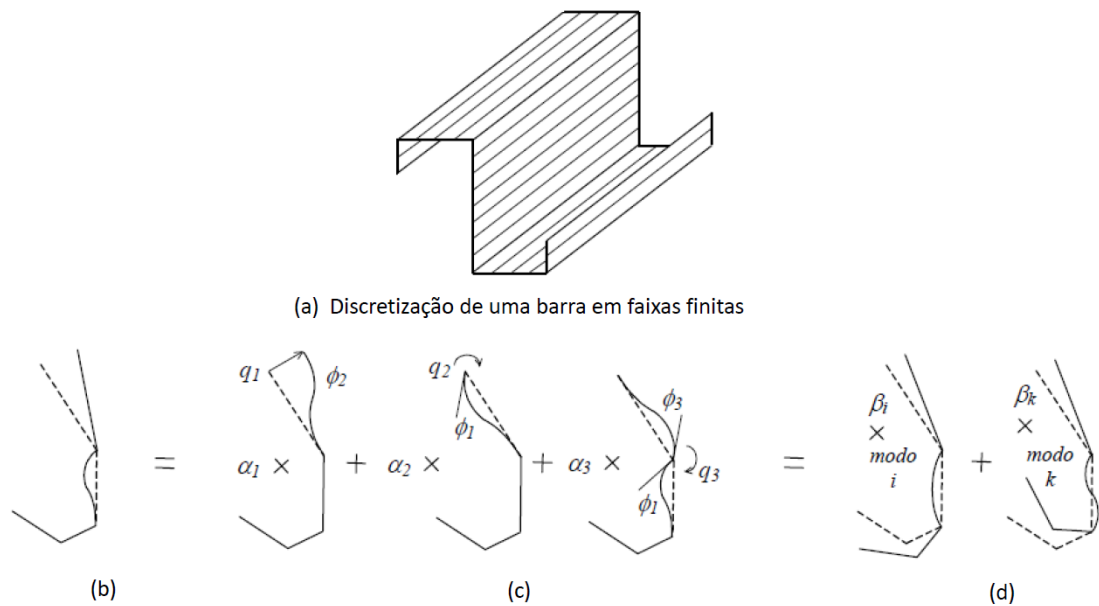
As primeiras publicações de Schardt sobre a GBT em inglês surgiram apenas em 1994 (Schardt, 1994a,b), ou seja, cerca de 30 anos após o “nascimento” da teoria e 5 anos após a publicação do seu livro (Schardt, 1989), o qual constitui ainda hoje a referência principal neste domínio. É por isso que não surpreende que o MFF (Método das Faixas Finitas) que está a “meio caminho” entre a GBT e o MEF (método dos elementos finitos) com elementos de casca, tenha sido objecto de uma disseminação muitíssimo superior à da GBT, isto apesar de o aparecimento da GBT anteceder a publicação dos primeiros trabalhos relativos ao MFF (Cheung, 1968a,b). John Michael Davies, Professor na Universidade de Salford e mais tarde na Universidade de Manchester, pode ser apontado como o grande responsável pela divulgação da GBT. Davies teve o seu primeiro contacto com a GBT nos anos 80, tendo reconhecido de imediato a elegância e o seu potencial. Pode afirmar-se que Davies, em conjunto com o seu aluno Leach (1989), contribuiu de forma decisiva para a difusão da GBT junto da comunidade técnico-científica internacional, contribuindo, assim, para o crescimento e relevância deste método na resolução de problemas estruturais envolvendo barras de parede fina, em detrimento de outros até então mais difundidos, como o MFF ou o MEF com elementos de casca.

Na última década este cenário alterou-se completamente e, actualmente, a GBT desperta o interesse de investigadores por todo o mundo, que estudam novas formulações e aplicações desta teoria a novos problemas de Engenharia. Hoje em dia existem artigos disponíveis sobre a GBT que foram produzidos em diversos países (e.g., Camotim *et al.*, 2004,2005,2007; Simão

e Silva, 2002,2003; Baláz, 1999; Rendeck e Baláz, 2004; Halme, 2002).

A GBT tem vindo a afirmar-se como uma alternativa bastante vantajosa aos métodos “clássicos” (i.e., MFF e MEF com elementos finitos de casca) de resolução de problemas estruturais que envolvem barras prismáticas de parede fina com secção deformável. Na GBT, a configuração deformada de uma barra é expressa em termos de uma combinação de modos de deformação da secção transversal, pré-determinados, reduzindo desta forma o problema à determinação das funções que fornecem a amplitude de cada modo ao longo do eixo da barra. As soluções obtidas com a GBT permitem extrair conclusões clarificadoras acerca do comportamento estrutural de barras de parede fina, através da análise da *participação modal* (i.e., da participação dos modos de deformação na solução do problema). Para além disso consegue-se, em geral, atingir um razoável grau de precisão da solução com um número de graus de liberdade bastante mais reduzido do que o utilizado em modelos de faixas finitas ou elementos finitos de casca. Essa economia computacional resulta essencialmente da introdução de constrangimentos aos campos de tensões e de deformações, permitindo reduzir a dimensão do espaço dos modos de deformação admissíveis. Por exemplo, na formulação clássica de Schardt (1989), admite-se que a extensão transversal e a distorção do plano médio das paredes que constituem a barra são nulas.

De certa forma, é lícito afirmar que as filosofias subjacentes à GBT e ao MFF<sup>1</sup> são semelhantes, no sentido em que ambas aproximam o campo de deslocamentos, (i) ao longo da linha média de uma secção transversal e (ii) ao longo do comprimento da barra, de formas distintas e independentes. A diferença fundamental entre os dois métodos reside na forma como é discretizada a deformação da secção transversal (ver figura 1.1):



Decomposição da (b) configuração deformada de uma secção em genérica segundo (c) o MFF e (d) a GBT

Figura 1.1: Discretização segundo o MFF e a GBT ( $\alpha_i$  e  $\beta_i$  são amplitudes) (extraído de Silvestre, 2005)

<sup>1</sup>Apesar do MFF não recorrer verdadeiramente ao conceito de «secção transversal», apresenta vários pontos em comum com a GBT. O seu nome provém do facto de discretizar a barra num número de faixas longitudinais.

- (i) No MFF, os deslocamentos ao longo da linha média da secção são aproximados por funções de forma (polinómios, em geral), definidas na dimensão transversal de cada faixa. As amplitudes dessas funções ao longo da barra são as incógnitas do problema.
- (ii) Na GBT, definem-se as funções de forma (modos de deformação) ao longo de *toda* a linha média da secção. Tal como no MFF, as amplitudes dessas funções (modos) constituem as incógnitas do problema.

A principal desvantagem do MFF face à GBT reside no facto de cada grau de liberdade corresponder à imposição de um deslocamento/rotação nodal (e à restrição dos restantes), não envolvendo a deformação de toda a secção transversal. Este procedimento não permite estabelecer uma hierarquia entre os modos de deformação da secção, o que não é eficiente do ponto de vista computacional, e, em particular, dificulta a interpretação dos resultados obtidos. De facto, com a GBT torna-se possível analisar a contribuição dos diversos modos de deformação para a resolução do problema (ver figura 1.2).

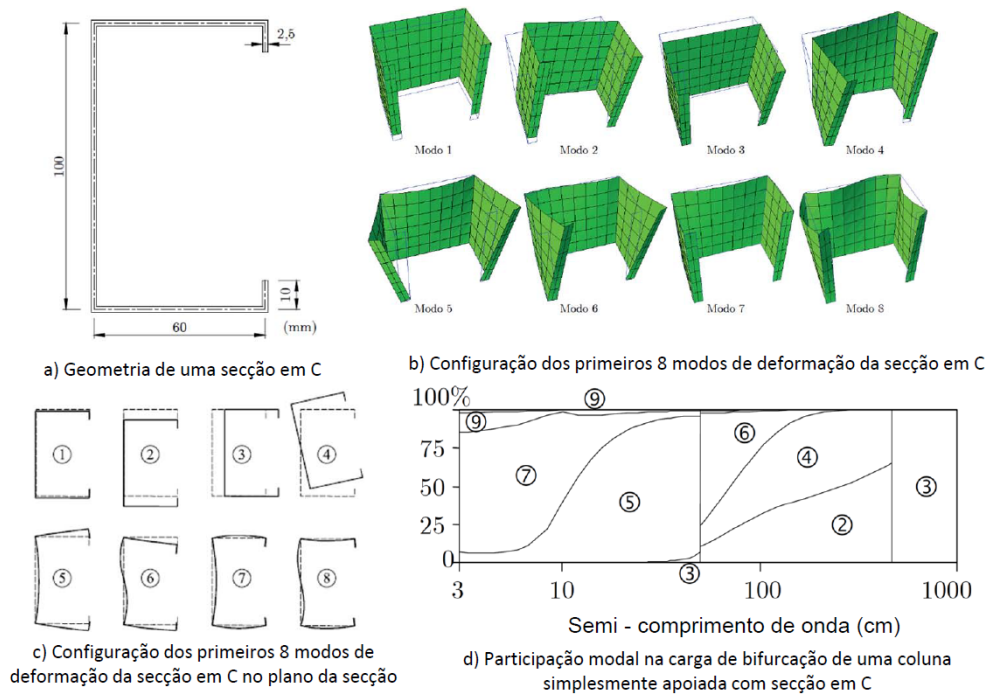


Figura 1.2: Modos de deformação da GBT e participação modal de uma coluna simplesmente apoiada com secção em C (extraído de Gonçalves, 2007).

## 1.2 Motivação e objectivos

Apesar da GBT ter demonstrado possuir excelentes potencialidades quando aplicada a problemas fisicamente lineares, o mesmo não se pode afirmar relativamente aos problemas fisicamente não-lineares. A resolução destes problemas através da GBT envolve alguma complexidade. Na verdade esta teoria encontra-se ainda relativamente longe de poder ser aplicada, de forma generalizada, no processo de análise e verificação da segurança de estruturas (Gonçalves, 2007).

Desta forma, constitui um desafio poder conhecer, explorar e ter a oportunidade de contribuir para o desenvolvimento e divulgação de um método com tantas potencialidades como é a GBT. Neste contexto, o presente trabalho tem como objectivo o desenvolvimento, a implementação e a validação de um elemento finito elastoplástico baseado na GBT.

Na grande maioria dos casos, como já foi referido, as aplicações da GBT envolvem materiais elásticos lineares e isotrópicos. No contexto da análise de barras de parede fina constituídas por materiais elastoplásticos, podem apontar-se alguns desenvolvimentos recentes da GBT como a obtenção (i) de cargas de bifurcação plástica, em casos com trajectória de pré-encurvadura trivial (Gonçalves e Camotim *et al.*, 2004, 2007, 2010) e (ii) do comportamento fisicamente não-linear, desprezando os efeitos geometricamente não-lineares (Gonçalves e Camotim, 2005). No presente trabalho esta última formulação é generalizada a secções arbitrárias, com modos de deformação sinusoidais e funções de interpolação de Hermite – a formulação original foi apenas aplicada a barras constituídas por uma única parede, modos de deformação lineares e funções de interpolação lineares.

### 1.3 Organização da Dissertação

A tese encontra-se dividida em seis capítulos.

No segundo capítulo são indicados os conceitos fundamentais para a compreensão da GBT. São apresentadas as equações fundamentais da GBT. Ainda neste capítulo procede-se à determinação do sistema de equações diferenciais de equilíbrio da GBT e à sua linearização admitindo um comportamento elástico linear.

No terceiro capítulo estabelecem-se as relações constitutivas (i) para materiais elásticos e (ii) para materiais elastoplásticos. São introduzidos os conceitos e hipóteses simplificativas que possibilitam a elaboração de uma lei capaz de aproximar o comportamento fisicamente não-linear do material.

No quarto capítulo é apresentada a aproximação pelo método dos elementos finitos. São introduzidas as funções de interpolação e são feitas referências à forma de obtenção dos modos de deformação da secção. Obtêm-se as expressões das equações fundamentais da GBT discretizadas e são abordados alguns dos aspectos computacionais que contribuem para a formulação de um elemento finito fisicamente não-linear.

No quinto capítulo apresentam-se os resultados da implementação do elemento finito desenvolvido no capítulo anterior, através da análise de alguns exemplos ilustrativos. A observação dos resultados obtidos permite avaliar a precisão da GBT e transmitir uma ideia das suas potencialidades.

No sexto e último capítulo são resumidas as principais conclusões do trabalho efectuado e apresentam-se alguns desenvolvimentos futuros.

### 1.4 Publicações

Parte do trabalho efectuado no âmbito da presente formulação foi objecto de publicação num artigo de conferência (Gonçalves *et al.*, 2011). Neste artigo foram incluídos vários tipos de elementos finitos de barra fisicamente não-lineares baseados numa formulação clássica e numa formulação em termos de esforços da GBT. Para além dos resultados obtidos através da aplicação de elementos finitos tipo “placa” (esforços de membrana), os quais são abordados na presente dissertação, foram apresentados elementos finitos de “laje” (esforços de flexão) e



de “casca” (esforços de membrana e flexão), através de exemplos que ilustram as vantagens da sua utilização.



## Capítulo 2

# Equações fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

### 2.1 Descrição cinemática

Considere-se a barra prismática de parede fina representada na figura 2.1. Em cada parede o sistema de eixos local é designado por  $(x, y, z)$ , onde  $x$  e  $y$  definem o plano médio da parede, sendo que  $x$  corresponde ao comprimento da barra e  $y$  à linha média da secção. A coordenada  $z$  é medida na direcção perpendicular ao plano médio da secção, ao longo da espessura. As componentes do campo de deslocamentos, ao nível do plano médio da barra, associadas a este sistema de eixos local designam-se, respectivamente, pelas letras  $u$ ,  $v$  e  $w$ , conforme se indica na figura 2.1.

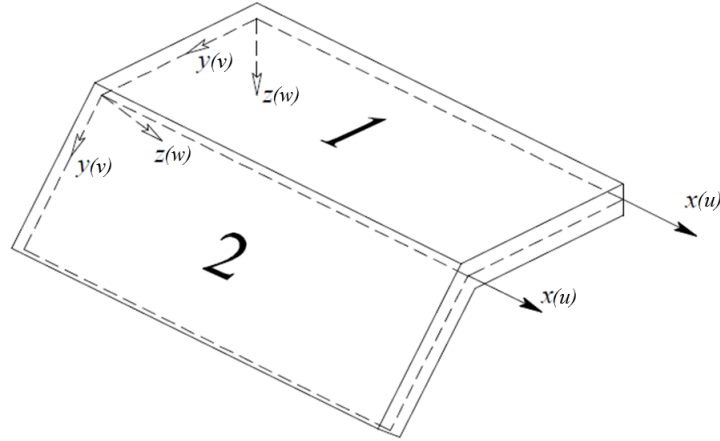


Figura 2.1: Eixos locais das paredes de uma secção de parede fina arbitrária e componentes do campo de deslocamentos (extraído de Gonçalves *et al.*, 2011)

O campo de deslocamentos  $\mathbf{U}$  segundo as coordenadas  $x, y, z$  de um elemento pode ser definido pelo vector

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

## Capítulo 2. Equações fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

Assume-se a hipótese da *lineariedade geométrica* (decorrente da hipótese dos pequenos deslocamentos), em que as relações entre as deformações e os deslocamentos são lineares. O estado de deformação de um corpo é caracterizado pelo tensor das deformações infinitesimais  $\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z)$ ,

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \\ SIM & & \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

As componentes do tensor das deformações dividem-se em extensões, dadas por,  $\varepsilon_{xx}$ ,  $\varepsilon_{yy}$  e  $\varepsilon_{zz}$  e distorções, representadas por,  $\gamma_{xy}$ ,  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  as quais são dadas por<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= u_{,x} & \gamma_{xy} &= u_{,y} + v_{,x}, \\ \varepsilon_{yy} &= v_{,y} & \gamma_{xz} &= u_{,z} + w_{,x}, \\ \varepsilon_{zz} &= w_{,z} & \gamma_{yz} &= v_{,z} + w_{,y}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

No caso dos elementos de parede fina como o representado na figura 2.1 é válida a hipótese de Kirchhoff em cada parede da secção transversal da barra:

- As fibras normais ao plano médio da placa permanecem indeformáveis e mantêm-se perpendiculares ao plano médio após a deformação, ou seja,

$$\varepsilon_{zz} = 0 \quad \text{e} \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad (2.4)$$

conforme se mostra na figura 2.2.

De acordo com esta hipótese o campo de deformações é plano, pelo que as componentes relevantes de  $\boldsymbol{\varepsilon}$  serão doravante agrupadas no vector

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Considere-se o perfil transversal, no plano  $(x, z)$ , de uma placa e as suas configurações indeformada e deformada representadas na figura 2.3. Em primeiro lugar, comece por admitir-se que os pontos de coordenadas  $O(x, y, z = 0)$  e  $P(x, y, z \neq 0)$  pertencem à mesma fibra normal ao plano médio da placa e designe-se por  $(u, v, w)$  e  $(u^P, v^P, w^P)$  os deslocamentos de  $O$  (plano médio,  $z = 0$ ) e  $P$  ( $z \neq 0$ ), respectivamente. A adopção da hipótese (2.4) implica que a extensão de uma fibra normal ao plano médio da placa (segundo o eixo  $z$ ) é nula, isto é, que não há qualquer variação de comprimento nesta direcção. Assim, tem-se

$$\varepsilon_{zz} = 0 \Leftrightarrow w_{,z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (2.6)$$

o que conduz a que  $w^P$  seja independente da coordenada  $z$ , ou seja, o deslocamento  $w$  pode ser expresso apenas em função das coordenadas  $w(x, y)$ .

A adopção da hipótese Kirchhoff leva a que o campo de rotações da parede possa ser definido da seguinte forma

$$\theta_x(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}. \quad (2.7)$$

---

<sup>1</sup>Usando a notação indicial, as derivadas parciais por vezes podem ser representadas na forma  $f_{,x} = \frac{\partial f}{\partial x}$  ou  $f_{,xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ .

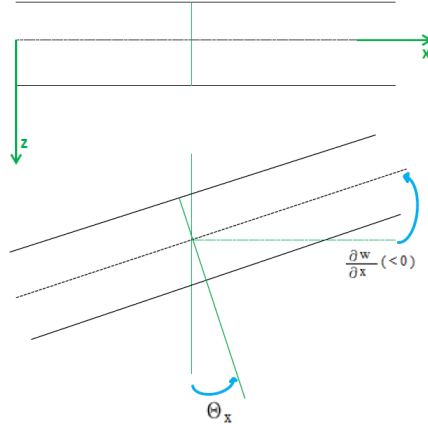


Figura 2.2: Representação da hipótese de kirchhoff

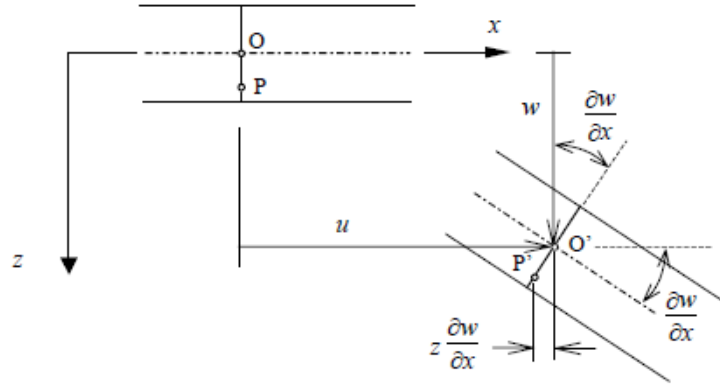


Figura 2.3: Configurações indeformada e deformada de uma placa (extraído de Silvestre, 2005)

$$\theta_y(x, y) = \frac{\partial w(x, y)}{\partial y}. \quad (2.8)$$

Ao observar-se a figura 2.3 pode escrever-se o deslocamento do ponto  $P$  da seguinte forma

$$u^P(x, y, z) = u(x, y) - z\theta_x(x, y) = u(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial x}, \quad (2.9)$$

$$v^P(x, y, z) = v(x, y) - z\theta_y(x, y) = v(x, y) - z\frac{\partial w}{\partial y}, \quad (2.10)$$

$$w^P(x, y, z) = w(x, y). \quad (2.11)$$

A figura 2.4 permite observar a decomposição do deslocamento axial  $u$  (para o deslocamento transversal a figura é análoga) num elemento infinitesimal de placa  $dy$  com espessura  $t$  nas parcelas de membrana (primeiro termo das expressões (2.9) e (2.10)) e de flexão (segundo termo das expressões (2.9) e (2.10)).

As relações que se estabelecem entre o campo das deformações e o campo dos desloca-

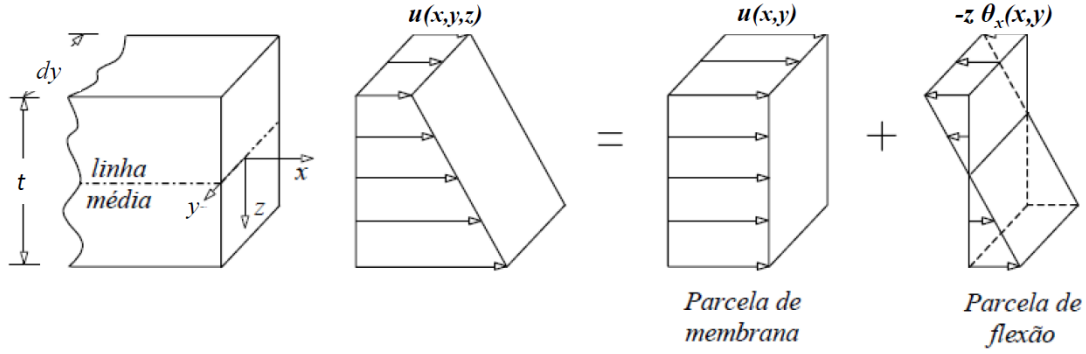


Figura 2.4: Deslocamento axial numa placa: decomposição nas parcelas de membrana e flexão (extraído de Silvestre, 2005)

mentos são lineares, como já foi referido. Assim, a partir de (2.9) e (2.10) obtém-se

$$\varepsilon_{xx} = u_{,x}^P = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial x}}^{\text{Membrana}} - z \overbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}}^{\text{Flexão}}, \quad (2.12)$$

$$\varepsilon_{yy} = v_{,y}^P = \overbrace{\frac{\partial v}{\partial y}}^{\text{Membrana}} - z \overbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}}^{\text{Flexão}}, \quad (2.13)$$

$$\gamma_{xy} = u_{,y}^P + v_{,x}^P = \overbrace{\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}}^{\text{Membrana}} - 2z \overbrace{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}^{\text{Flexão}}. \quad (2.14)$$

À semelhança do que se passa para as componentes do campo de deslocamentos, as componentes do tensor das deformações também podem ser decompostas segundo as parcelas de membrana e de flexão, ou seja,

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}^M + \varepsilon_{xx}^F, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{yy}^M + \varepsilon_{yy}^F \quad \text{e} \quad \gamma_{xy} = \gamma_{xy}^M + \gamma_{xy}^F, \quad (2.15)$$

em que a parcela de membrana \$( )^M\$ corresponde ao primeiro termo e a parcela de flexão \$( )^F\$ ao segundo termo das expressões (2.12), (2.13) e (2.14), isto é,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx}^M &= u_{,x} & \varepsilon_{xx}^F &= -zw_{,xx}, \\ \varepsilon_{yy}^M &= v_{,y} & \varepsilon_{yy}^F &= -zw_{,yy}, \\ \gamma_{xy}^M &= u_{,y} + v_{,x} & \gamma_{xy}^F &= -2zw_{,xy}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Desta forma, o tensor das deformações, na sua forma vectorial, pode ser escrito como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{A}^M + z\mathbf{A}^F)\mathbf{U} \quad (2.17)$$

onde

$$\mathbf{A}^M = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{A}^F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ 0 & 0 & -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ 0 & 0 & -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix}, \quad (2.18)$$

representam os operadores diferenciais de membrana e flexão, respectivamente.

## 2.2 Tensões

Defina-se o campo de tensões com a forma matricial através do tensor das tensões,  $\sigma(x, y, z)$ , como

$$\sigma(x, y, z) = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ SIM & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}. \quad (2.19)$$

As tensões  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$  e  $\sigma_{zz}$  designam-se por tensões normais e as tensões  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xz}$  e  $\sigma_{yz}$ , designam-se por tensões de corte ou tensões tangenciais.

Assume-se que a tensão normal na direcção  $z$  (perpendicular ao plano médio da placa) é nula

$$\sigma_{zz} = 0, \quad (2.20)$$

o que é inconsistente com o estado plano de deformação (2.5) para materiais com coeficiente de Poisson não nulo ( $\nu \neq 0$ ), embora tal inconsistência não conduza a erros significativos.

Por outro lado, as relações constitutivas (elásticas e elastoplásticas) permitem obter, a partir de (2.4),

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0. \quad (2.21)$$

Isto conduz a um estado plano de tensão, sendo que as componentes relevantes do campo de tensões podem ser agrupadas num vector

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix}. \quad (2.22)$$

## 2.3 Hipóteses simplificativas adicionais

Para além das hipóteses já referidas, na realização do presente trabalho também foram consideradas algumas hipóteses adicionais que se apresentam de seguida:

- (I) A hipótese de Vlasov (Vlasov, 1958) consiste em admitir que fibras paralelas aos eixos  $x$  e  $y$  e pertencentes ao plano médio da parede (na configuração indeformada) permanecem perpendiculares entre si após a deformação, o que implica

$$\gamma_{xy}^M = 0. \quad (2.23)$$

A consideração desta hipótese na elaboração do modelo matemático é útil para diminuir o número de modos de deformação admissíveis. Naturalmente, só pode ser aplicado nos casos em que a deformação por corte é desprezável, como é o caso de vigas longas de parede fina de secção aberta.

- (II) As fibras orientadas segundo  $y$  e pertencentes ao plano médio da placa (na configuração indeformada) não sofrem qualquer extensão,

$$\varepsilon_{yy}^M = 0. \quad (2.24)$$

- (III) A hipótese de Navier, em que se assume que

$$\sigma_{yy}^M = 0. \quad (2.25)$$

Esta última hipótese é inconsistente com a hipótese (2.24) para materiais cujo coeficiente de Poisson não seja nulo ( $\nu \neq 0$ ), mas não conduz a erros significativos em problemas do tipo “barra”<sup>2</sup>.

A hipótese (I), de Vlasov, só é utilizada em certos exemplos ilustrativo que serão abordados no Capítulo 5. As hipóteses (II) e (III), são sempre assumidas como válidas em todos os casos abordados ao longo deste trabalho. Contudo, na secção que se segue, para obter expressões mais gerais, não se adopta a hipótese (III). Finalmente, na implementação e nos exemplos apresentados consideram-se apenas a parcela de membrana das tensões e deformações, o que permite dispensar a integração numérica das equações na espessura das paredes.

## 2.4 Equações da GBT

De acordo com a GBT, cada componente de deslocamento ( $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  e  $w(x, y)$ ) é expressa como uma combinação linear de dois tipos de funções:

- (i) funções de amplitude  $\phi_k(x)$ , as quais dependem de  $x$  e constituem as incógnitas do problema e
- (ii) modos de deformação, cujas componenetes  $\bar{u}_k(y)$ ,  $\bar{v}_k(y)$ ,  $\bar{w}_k(y)$  são dependentes unicamente de  $y$ .

Tal procedimento de separação de variáveis conduz a

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}(y)\mathbf{\Phi}(x), \quad (2.26)$$

em que, a matriz  $\bar{\mathbf{U}}(y)$  agrupa as componentes  $\bar{u}_k(y)$ ,  $\bar{v}_k(y)$ ,  $\bar{w}_k(y)$  de cada um dos  $N$  modos de deformação,

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{w}}^t(y) \end{bmatrix} \text{ com, } \begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}^t(y) &= [\bar{u}_1(y) \cdots \bar{u}_N(y)], \\ \bar{\mathbf{v}}^t(y) &= [\bar{v}_1(y) \cdots \bar{v}_N(y)], \\ \bar{\mathbf{w}}^t(y) &= [\bar{w}_1(y) \cdots \bar{w}_N(y)], \end{aligned} \quad (2.27)$$

e  $\mathbf{\Phi}(x)$  agrupa as funções de amplitude,

$$\mathbf{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Contudo, se se utilizar a hipótese de Vlasov, a matriz  $\bar{\mathbf{U}}$  tem de ser dada por

$$\bar{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bar{u}_1(y) \cdots \bar{u}_N(y) \\ \bar{v}_1(y) \cdots \bar{v}_N(y) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{w}_1(y) \cdots \bar{w}_N(y) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

---

<sup>2</sup> Em problemas do tipo “placa” esta hipótese conduz potencialmente, a erros significativos.



e o vector  $\Phi(x)$  escreve-se como

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \\ \phi_{1,x}(x) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(x) \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

e, portanto, (2.26) fornece

$$U = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bar{u}_1(y) \cdots \bar{u}_N(y) \\ \bar{v}_1(y) \cdots \bar{v}_N(y) & 0 & \cdots & 0 \\ \bar{w}_1(y) \cdots \bar{w}_N(y) & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \\ \phi_{1,x}(x) \\ \vdots \\ \phi_{N,x}(x) \end{bmatrix}. \quad (2.31)$$

De facto, esta alteração é necessária para assegurar a validade da hipótese de Vlasov, já que, para satisfazer (2.23), ou seja,

$$\gamma_{xy}^M = u_{,y} + v_{,x} = 0, \quad (2.32)$$

efectuando a separação de funções (2.31) tem-se para cada modo

$$\gamma_{xy}^M = \bar{u}_{k,y} \phi_{k,x} + \bar{v}_k \phi_{k,x} = 0 \quad (2.33)$$

o que não se verifica se a componente  $u$  não fosse multiplicada por  $\phi_{k,x}$ . Note-se ainda que, para verificar a hipótese de Vlasov, cada modo tem de satisfazer

$$\bar{u}_{k,y} = -\bar{v}_k. \quad (2.34)$$

Como já foi referido, as relações deformações – deslocamentos são dadas por (2.17). Com a separação (2.26) tem-se

$$\varepsilon = (A^M + zA^F) U = (A^M + zA^F) \bar{U} \Phi. \quad (2.35)$$

As relações entre as tensões e as deformações na fase elástica (material de St. Venant–Kirchhoff), para um estado plano de tensão, são dadas por,

$$\sigma = C\varepsilon \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

em que  $C$  é o operador constitutivo elástico para estados planos de tensão e  $E$ ,  $G$  e  $\nu$  são o módulo de elasticidade, módulo de distorção e coeficiente de Poisson do material. Introduzindo as relações deformações – deslocamentos (2.35) na relação constitutiva, obtêm-se as relações tensões – deformações da GBT.

## Capítulo 2. Equações fundamentais da Teoria Generalizada de Vigas (GBT)

---

As equações de equilíbrio podem ser obtidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que estabelece

$$\delta W_{ext} + \delta W_{int} = 0, \quad (2.37)$$

com

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV = - \int_V ((\mathbf{A}^M + z \mathbf{A}^F) \bar{\mathbf{U}} \delta \boldsymbol{\Phi})^t \boldsymbol{\sigma} dV \quad (2.38)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}^t \mathbf{f} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\Phi}^t \bar{\mathbf{U}}^t \mathbf{f} d\Omega \quad (2.39)$$

onde  $\mathbf{f}$  é o vector das cargas aplicadas na superfície média da barra  $\Omega^3$  ( $z = 0$ ).

Para o caso fisicamente não-linear, para resolver o sistema de equações, é necessário obter a linearização da equação de equilíbrio (variação incremental/iterativa  $\Delta$ ),

$$\Delta \delta W_{ext} + \Delta \delta W_{int} = 0, \quad (2.40)$$

com

$$\begin{aligned} - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \Delta \boldsymbol{\sigma} dV + \int_{\Omega} \delta \mathbf{U}^t \Delta \mathbf{f} d\Omega &= 0 \Leftrightarrow \\ - \int_V ((\mathbf{A}^M + z \mathbf{A}^F) \bar{\mathbf{U}} \delta \boldsymbol{\Phi})^t \mathbf{C}_t (\mathbf{A}^M + z \mathbf{A}^F) \bar{\mathbf{U}} \Delta \boldsymbol{\Phi} dV + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\Phi}^t \bar{\mathbf{U}}^t \Delta \mathbf{f} d\Omega &= 0, \end{aligned} \quad (2.41)$$

onde  $\mathbf{C}_t$  é o operador constitutivo tangente, estabelecendo a relação

$$\Delta \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t \Delta \boldsymbol{\varepsilon}. \quad (2.42)$$

Este operador será abordado no Capítulo 3.

---

<sup>3</sup>Por uma questão de simplificação não se consideram outros tipos de cargas.

## Capítulo 3

# Relações Constitutivas

### 3.1 Materiais elásticos

As relações constitutivas para materiais elásticos (Material de St. Venant–Kirchhoff) são dadas por

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon}_e \quad (3.1)$$

em que  $\boldsymbol{\varepsilon}_e$  é a parcela elástica da deformação e  $\mathbf{C}$  representa o operador constitutivo elástico. Recorde-se que os tensores das tensões e das deformações,  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , são dados pelas formas vectoriais

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

e o operador constitutivo elástico é dado por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

### 3.2 Materiais elastoplásticos

Os materiais elastoplásticos são caracterizados por apresentarem um comportamento elástico até um determinado nível de tensão (limite elástico). Quando esse limite é atingido torna-se possível a ocorrência de deformações irreversíveis (permanentes). Os materiais em que o limite elástico aumenta com a deformação plástica apresentam endurecimento. Admitindo pequenas deformações, o tensor das deformações total pode ser decomposto na soma de uma parcela elástica e outra *plástica*,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p, \quad (3.5)$$

sendo a parcela elástica da deformação obtida através de (3.1).

Para definir um modelo matemático que permita descrever a parcela plástica das deformações, é necessário considerarem-se três aspectos:

1. Um **critério de cedência**, o que permite quantificar o nível de tensão num ponto e detectar se o limite elástico foi atingido;
2. Uma **lei de endurecimento**, descrevendo como o critério de cedência evolui depois de se ter iniciado o processo de plastificação;
3. Uma **regra de escoamento**, definindo a lei de evolução do escoamento plástico.

No presente trabalho foram considerados materiais elastoplásticos cujo comportamento pode ser caracterizado pela adopção das seguintes hipóteses simplificativas:

- (i) A fase elástica obedece à lei material de St. Venant–Kirchhoff;
- (ii) Critério de cedência de Mises–Hencky;
- (iii) Lei de escoamento associada e endurecimento isotrópico;
- (iv) Estado plano de tensão com  $\sigma_{yy} = 0$  (hipótese (III), (2.25));
- (v) Pequenas deformações.

A partir do momento em que se entra em regime plástico, a relação elástica só se pode estabelecer entre as tensões e a parcela elástica das deformações, isto é

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} \underbrace{(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}_p)}_{\boldsymbol{\varepsilon}_e}. \quad (3.6)$$

As deformações totais,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , são conhecidas, uma vez que podem ser obtidas através do campo de deslocamentos  $\mathbf{U}$ . Assim sendo, resta definir um modelo matemático que permita descrever a parcela plástica das deformações.

A superfície de cedência pode ser encarada como a envolvente de todos os estados de tensão possíveis e pode ser definida através da respectiva função de cedência, conforme o critério de cedência escolhido. O critério de cedência escolhido foi o de Mises–Hencky, sendo a respectiva função dada por

$$f = \sigma_{ef} - \sigma_y(\kappa) = 0 \quad (3.7)$$

onde  $\sigma_{ef} = \sqrt{3/2} \|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|$  é a tensão efectiva,  $\sigma_y$  é a tensão de cedência uniaxial, que pode ser função do parâmetro de endurecimento  $\kappa$ , e  $\|\text{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|$  é a norma<sup>1</sup> da parcela deviatórica<sup>2</sup> do tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ .

A lei adoptada para  $\kappa$  foi a de *endurecimento isotrópico com o critério da deformação plástica equivalente acumulada* (em inglês “*strain hardening*”). O facto do endurecimento ser isotrópico faz com que a alteração da superfície de cedência seja caracterizada por uma expansão radial em torno dos estados de tensão isotrópicos. Ao assumir-se que o parâmetro de endurecimento  $\kappa$  depende da deformação plástica equivalente acumulada,  $\bar{\varepsilon}_p$ , o valor de  $\kappa$  é dado por

$$\kappa = \bar{\varepsilon}_p = \int_0^t d\bar{\varepsilon}_p \quad (3.8)$$

---

<sup>1</sup>  $\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : \mathbf{A}} = \sqrt{A_{ij}A_{ij}}$  com soma em  $i$  e  $j$ .

<sup>2</sup> Uma matriz quadrada pode ser decomposta na soma das suas partes *isotrópica* e *deviatórica* através de  $\mathbf{A} = \text{iso}(\mathbf{A}) + \text{dev}(\mathbf{A})$ ,  $\text{iso}(\mathbf{A}) = \frac{1}{3} \text{tra}(\mathbf{A}) \mathbf{I}$  e  $\text{dev}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \text{iso}(\mathbf{A})$  em que,  $\text{tra}(\mathbf{A})$  é o traço de  $\mathbf{A}$  e  $\mathbf{I}$  é a matriz indetidade.

e

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{2/3} \|d\boldsymbol{\varepsilon}_p\| \quad (3.9)$$

onde  $\|d\boldsymbol{\varepsilon}_p\|$  é a norma da deformação plástica incremental na forma matricial e  $t$  é o “instante actual”.

Define-se o módulo de endurecimento  $H'$  por

$$H' = \frac{d\sigma_y}{d\bar{\varepsilon}_p} = \frac{E_t}{1 - E_t/E} \quad (3.10)$$

onde  $E_t = d\boldsymbol{\sigma}/d\boldsymbol{\varepsilon}$  é o módulo tangente uniaxial.

Para haver deformação plástica, o estado de tensão tem, não só de estar sobre a superfície de cedência, mas também de permanecer sobre ela, ou seja

$$\begin{cases} f = 0 \\ df = 0. \end{cases} \quad (3.11)$$

A segunda condição,  $df = 0$ , denomina-se *condição de consistência de Prager*. A lei de escoamento adoptada foi a *lei de escoamento associada*, o que implica que o escoamento plástico é sempre perpendicular à superfície de cedência. Tem-se então, na forma matricial,

$$d\boldsymbol{\varepsilon}_p = d\gamma \mathbf{n}, \quad (3.12)$$

onde,  $d\gamma$  é o *multiplicador plástico* (escalar não negativo) e  $\mathbf{n} = \frac{3}{2\sigma_{ef}} dev(\boldsymbol{\sigma})$  é o tensor de fluxo, cujo módulo é  $\|\mathbf{n}\| = \sqrt{3/2}$ . Assim, o incremento da deformação plástica equivalente pode ser relacionado com o multiplicador plástico a partir de (3.9) e (3.12), o que fornece

$$d\bar{\varepsilon}_p = \sqrt{2/3} d\gamma \|\mathbf{n}\| \Leftrightarrow d\bar{\varepsilon}_p = d\gamma. \quad (3.13)$$

Resta determinar uma expressão para o multiplicador plástico,  $d\gamma$ . Para isso, impõe-se a condição de consistência de Prager ( $df = 0$ ). Comece-se por diferenciar (3.7), o que fornece

$$df = d\sigma_{ef} - d\sigma_y(\kappa) = 0, \quad (3.14)$$

em que

$$d\sigma_{ef} = \sqrt{3/2} d(\|dev(\boldsymbol{\sigma})\|) = \mathbf{n} : d\boldsymbol{\sigma} \quad (3.15)$$

onde  $d\boldsymbol{\sigma}$  é escrito na forma matricial e

$$d\sigma_y = H' d\bar{\varepsilon}_p = H' d\gamma, \quad (3.16)$$

o que permite escrever (3.14) como

$$df = \mathbf{n} : d\boldsymbol{\sigma} - H' d\gamma = 0. \quad (3.17)$$

Tendo ainda em conta a relação constitutiva (3.6) na forma incremental e a equação (3.12) obtém-se

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\boldsymbol{\varepsilon}_p) = \mathbf{C} (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\gamma \mathbf{n}), \quad (3.18)$$

onde  $\mathbf{n}$  é agora escrito na forma vectorial

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_{xx} \\ n_{yy} \\ n_{zz} \\ 2 n_{xy} \\ 2 n_{xz} \\ 2 n_{yz} \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

### Capítulo 3. Relações Constitutivas

---

Ao substituir-se esta expressão em (3.17) resulta<sup>3</sup>

$$df = \mathbf{n}^t \mathbf{C} (d\boldsymbol{\varepsilon} - d\gamma \mathbf{n}) - H' d\gamma = 0 \quad (3.20)$$

e assim,  $d\gamma$  vem,

$$d\gamma = \frac{\mathbf{n}^t \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{n}^t \mathbf{C} \mathbf{n} + H'}. \quad (3.21)$$

Inserindo o resultado de  $d\gamma$  na equação constitutiva incremental (3.18) fica<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \left( d\boldsymbol{\varepsilon} - \frac{\mathbf{n}^t \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}}{\mathbf{n}^t \mathbf{C} \mathbf{n} + H'} \mathbf{n} \right) = \\ &= \underbrace{\mathbf{C} \left( \mathbf{I} - \frac{\mathbf{n} \mathbf{n}^t \mathbf{C}}{\mathbf{n}^t \mathbf{C} \mathbf{n} + H'} \right)}_{\mathbf{C}_t} d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.22)$$

em que  $\mathbf{C}_t$  é o *operador constitutivo tangente elastoplástico* e  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

---

<sup>3</sup> Note-se que a expressão tensorial  $\mathbf{n} : d\boldsymbol{\sigma} = n_{ij} d\sigma_{ij}$ , com soma em  $i$  e  $j$ , tendo em conta a simetria de  $\mathbf{n}$  e  $d\boldsymbol{\sigma}$ , é equivalente à expressão vectorial  $\mathbf{n}^t d\boldsymbol{\sigma} = n_i d\sigma_i$  (com soma em  $j$ ).

<sup>4</sup> Note-se que, como  $\mathbf{C}$  é simétrico,  $(\mathbf{n}^t \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{n} = n_i C_{ij} d\varepsilon_j n_k$  (com soma em  $i$  e  $j$ ) e, portanto, é igual a  $\mathbf{n} \mathbf{n}^t \mathbf{C} d\boldsymbol{\varepsilon}$ .

## Capítulo 4

# Implementação de um elemento finito

### 4.1 Discretização e interpolação

Para que a solução obtida com a GBT constitua uma boa aproximação, é conveniente que se façam dois tipos de discretização do problema:

- (i) **discretização longitudinal**, em que o comprimento total da barra,  $L$ , é dividido em  $n$  elementos finitos (o comprimento de cada elemento finito é dado por  $L_e$ );
- (ii) **discretização transversal**, que corresponde à escolha dos  $N$  modos de deformação da secção transversal.

O processo de determinação dos modos de deformação deve conduzir a um conjunto *hierárquico* de modos, no sentido em que os primeiros devem ser aqueles que em geral mais caracterizam a configuração deformada da viga (ou seja, mais «participam» na sua descrição). Por outro lado, o número de modos de deformação necessário para obter uma precisão aceitável deve ser o menor possível, caso contrário não se consegue estabelecer uma teoria que ofereça claras vantagens, do ponto de vista do esforço computacional, face aos métodos clássicos de análise de perfis de parede fina — os métodos dos elementos finitos (com elementos de casca) e das faixas finitas (Camotim *et al.*, 2004a e Gonçalves, 2007). A determinação dos modos de deformação está bem definida e consiste na resolução de um problema de valores e vectores próprios. Isto implica o tratamento de um conjunto de expressões com um grau de complexidade elevado (Silvestre, 2005), pelo que este assunto não será abordado na presente tese, fazendo-se apenas referência aos trabalhos de Shardt (1989); Leach (1989); Gonçalves (2007); Silvestre (2005); Gonçalves *et al.* (2010); Dinis *et al.* (2005); Gonçalves *et al.* (2010), entre outros, onde se encontram descritos os procedimentos necessários para a determinação dos modos de deformação. Nas figuras 4.1, 4.2 e 4.3 encontram-se alguns exemplos de modos de deformação determinados nalguns dos trabalhos anteriormente referidos. Na figura 4.4 estão representados os modos que foram utilizados na resolução de alguns dos exemplos ilustrativos que serão apresentados no Capítulo 5, nomeadamente nos casos em que a secção transversal é constituída por apenas uma parede (a) com nós intermédios e (b) sem nós intermédios.

No contexto da discretização longitudinal, aproximam-se as funções de amplitude modal contidas no vector  $\Phi(x)$ , através de

$$\Phi(x) = \Psi(x)\mathbf{d} \quad (4.1)$$

onde  $\Psi$  é a matriz das funções de interpolação e  $\mathbf{d}$  é o vector dos graus de liberdade do elemento. Consideram-se elementos finitos de dois nós. As funções de interpolação  $\Psi$  esco-

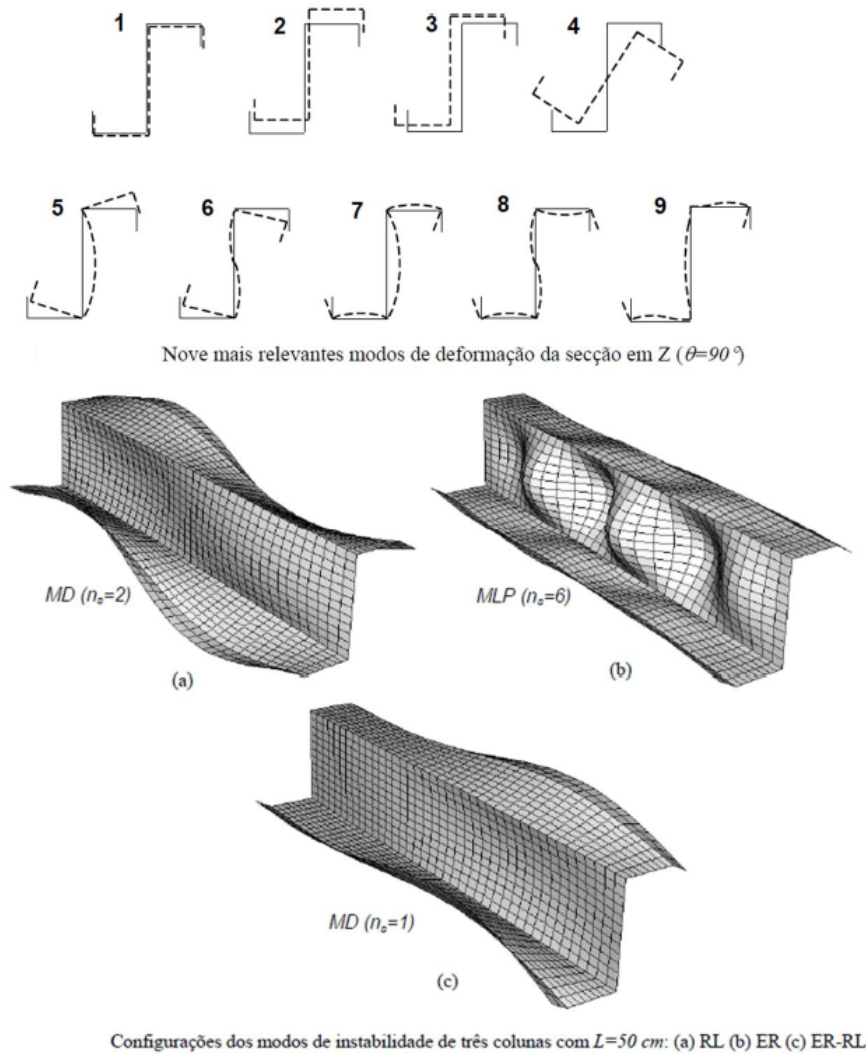


Figura 4.1: Modos de deformação de uma secção em Z (extraído de Silvestre, 2005)

lhidas foram de dois tipos (i) funções *lineares de Lagrange*, em que cada nó tem um grau de liberdade associado e (ii) funções *cúbicas de Hermite*, em que cada nó do elemento tem dois graus de liberdade associados. Adoptaram-se dois tipos de funções de interpolação porque são utilizados dois tipos de modos de deformação, nomeadamente, (i) os que não consideram a hipótese de Vlasov, o que requer apenas funções de interpolação lineares de Lagrange e (ii) os modos que consideram a hipótese de Vlasov e cuja aproximação das funções de amplitude tem de ser feita por polinómios de classe  $C^1$  como as funções de Hermite, caso contrário não se garante a continuidade dos deslocamentos longitudinais ( $\mathbf{u}$ ).

A dimensão do vector  $\Phi(x)$  varia de acordo com o número de modos,  $N$ . Para cada um dos tipos de funções de interpolação, os valores nodais das funções  $\phi_k$  e respectivas derivadas, podem ser agrupados num vector  $\mathbf{d}$ , dado por



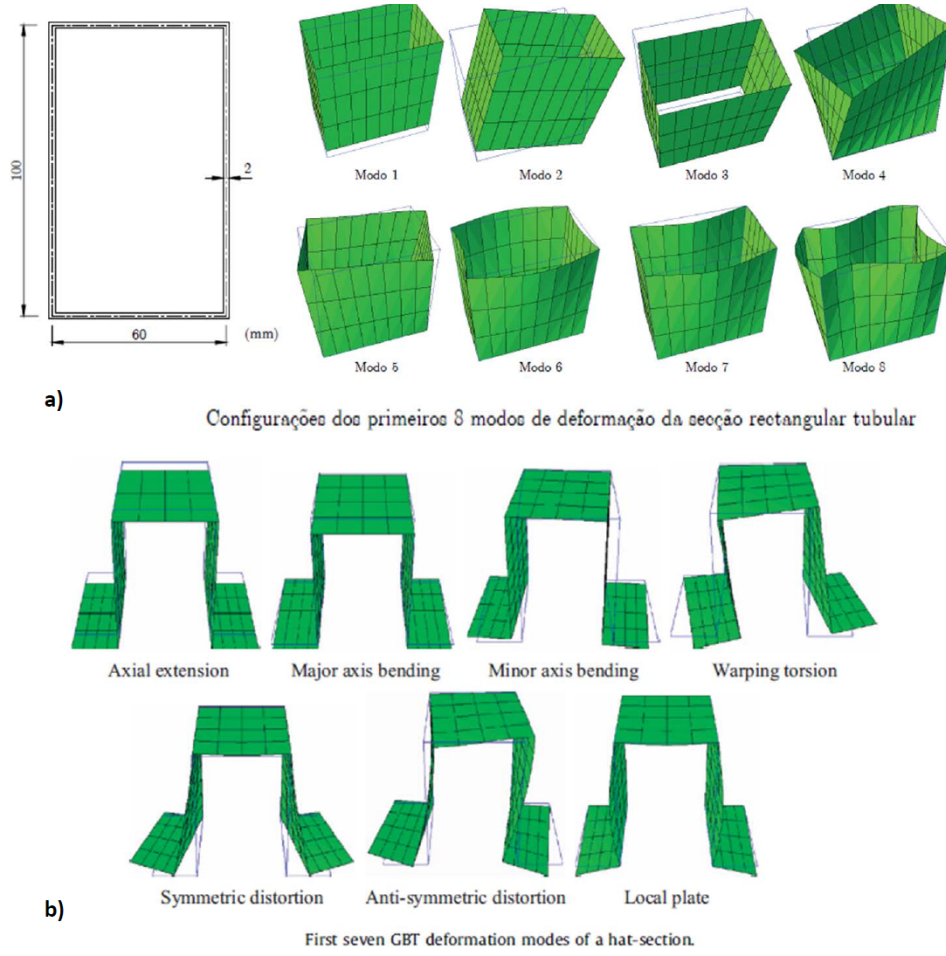


Figura 4.2: Modos de deformação de uma a) secção rectangular tubular e b) de uma secção em «hat» (extraído de Gonçalves, 2007 e Gonçalves *et al.*, 2010)

- Para as funções de Lagrange

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \\ \vdots \\ \phi_N(0) \\ \phi_1(L_e) \\ \phi_2(L_e) \\ \vdots \\ \phi_N(L_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{1N} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{2N} \end{bmatrix}, \quad (4.2)$$

em que o primeiro índice de  $\mathbf{d}$  designa o nó e o segundo índice indica o modo. A aproximação de cada modo é dada por

$$\phi_k(x) = \psi_1^L \phi_k(0) + \psi_2^L \phi_k(L_e) = \psi_1^L d_{1k} + \psi_2^L d_{2k} \quad k = \{1 \dots N\}, \quad (4.3)$$

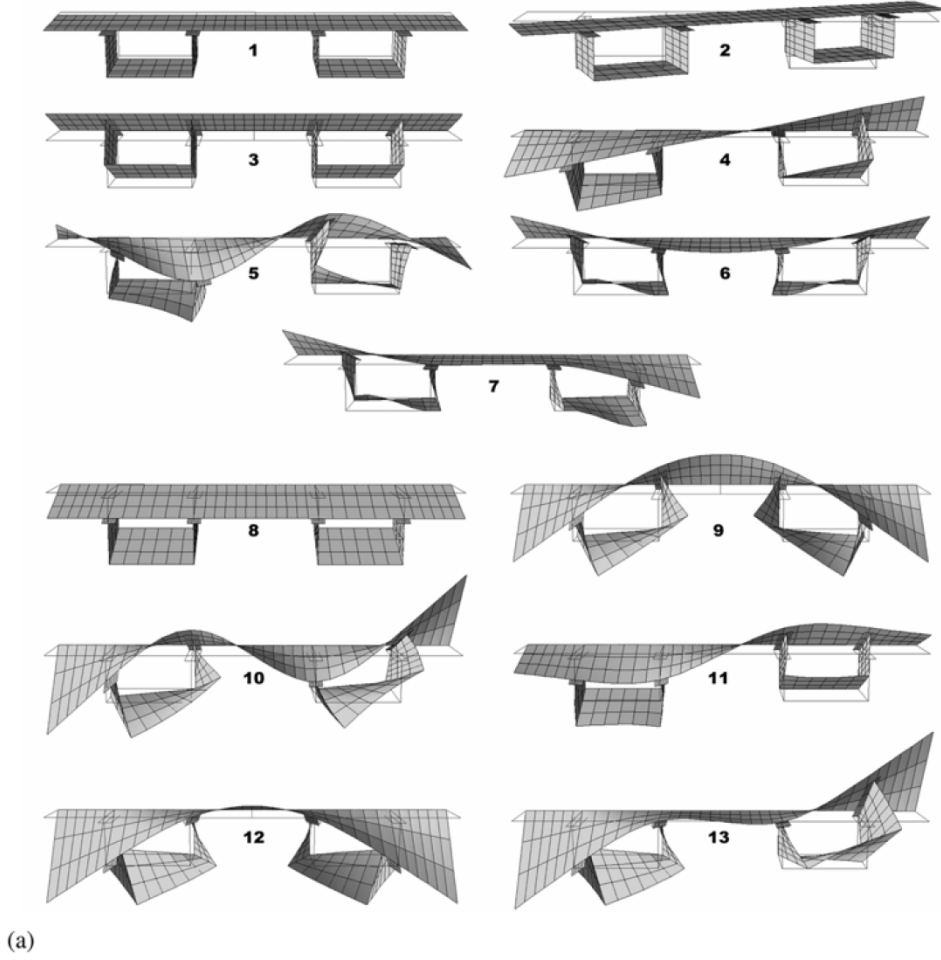


Figura 4.3: Modos de deformação de uma ponte mista aço–betão (extraído de Gonçalves *et al.*, 2010)

onde as funções de interpolação são representadas na figura 4.5 e são dadas explicitamente por

$$\psi_1^{\mathcal{L}} = 1 - x/L \quad \text{e} \quad \psi_2^{\mathcal{L}} = x/L. \quad (4.4)$$

Assim, (4.1) escreve-se como

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_1 & 0 & 0 & 0 & \psi_2 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz } \Psi^{\mathcal{L}} \text{ — funções de Lagrange}} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \\ \vdots \\ d_{1N} \\ d_{21} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{2N} \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

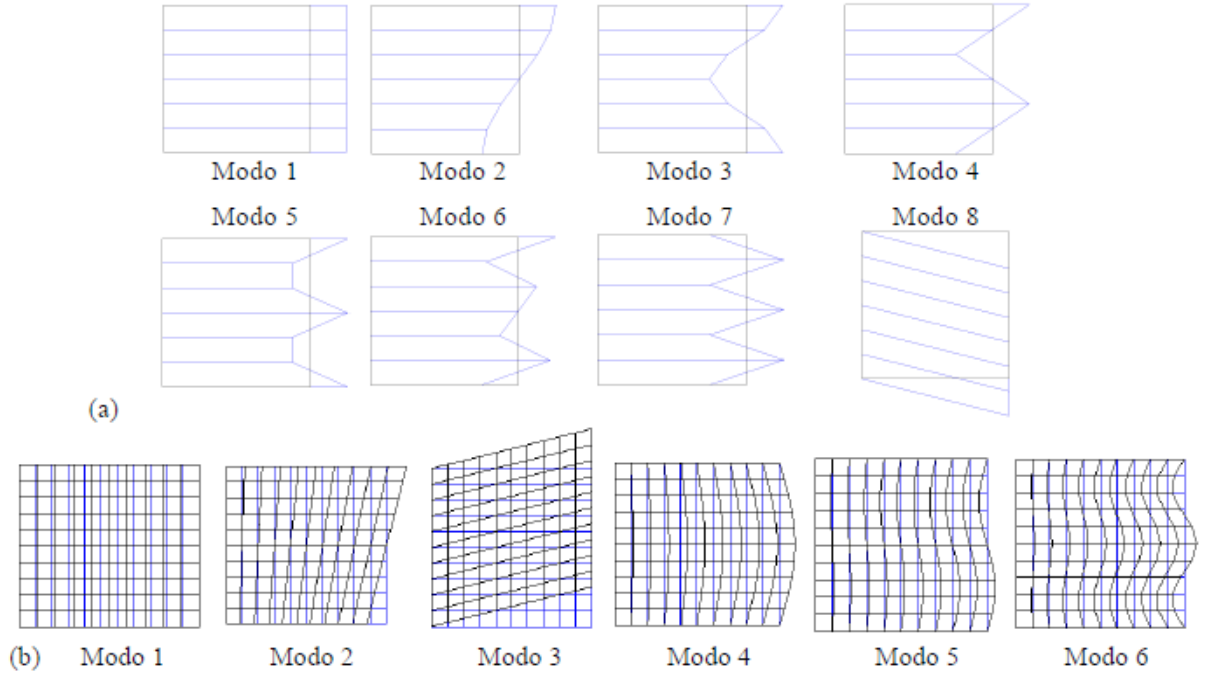


Figura 4.4: Modos de deformação de uma parede (a) com nós intermédios e (b) sem nós intermédios (extraído de Gonçalves *et al.*, 2011)

- Para as funções de Hermite

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_{1,x}(0) \\ \phi_2(0) \\ \phi_{2,x}(0) \\ \vdots \\ \phi_N(0) \\ \phi_{N,x}(0) \\ \phi_1(L_e) \\ \phi_{1,x}(L_e) \\ \phi_2(L_e) \\ \phi_{2,x}(L_e) \\ \vdots \\ \phi_N(L_e) \\ \phi_{N,x}(L_e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{1N} \\ d_{2N} \\ d_{31} \\ d_{41} \\ d_{32} \\ d_{42} \\ \vdots \\ d_{3N} \\ d_{4N} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

onde o primeiro índice de  $\mathbf{d}$  indica o número da função de interpolação (1 e 2 estão associados ao primeiro nó e 3 e 4 dizem respeito ao segundo nó) e o segundo índice indica o número do modo. A aproximação de cada modo é dada por

$$\begin{aligned} \phi_k(x) &= \psi_1^{\mathcal{H}} \phi_k(0) + \psi_2^{\mathcal{H}} \phi_{k,x}(0) + \psi_3^{\mathcal{H}} \phi_k(L_e) + \psi_4^{\mathcal{H}} \phi_{k,x}(L_e) = \\ &= \psi_1^{\mathcal{H}} d_{1k} + \psi_2^{\mathcal{H}} d_{2k} + \psi_3^{\mathcal{H}} d_{3k} + \psi_4^{\mathcal{H}} d_{4k}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

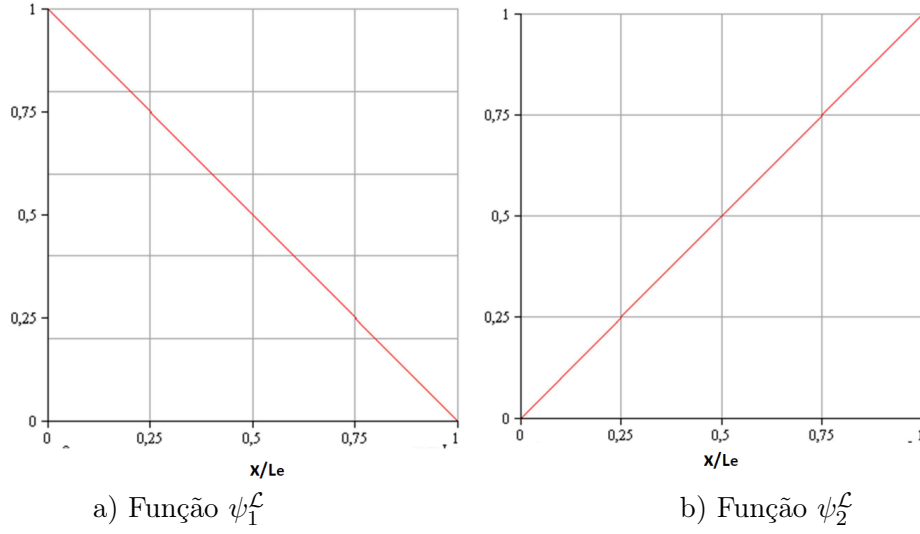


Figura 4.5: Funções de interpolação de Lagrange (lineares)

As funções de interpolação são dadas por

$$\begin{aligned}
 \psi_1^{\mathcal{H}} &= 2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + 1, \\
 \psi_2^{\mathcal{H}} &= L \left( \left( \frac{x}{L} \right)^3 - 2 \left( \frac{x}{L} \right)^2 + \frac{x}{L} \right), \\
 \psi_3^{\mathcal{H}} &= -2 \left( \frac{x}{L} \right)^3 + 3 \left( \frac{x}{L} \right)^2 \text{ e} \\
 \psi_4^{\mathcal{H}} &= L \left( \left( \frac{x}{L} \right)^3 - \left( \frac{x}{L} \right)^2 \right)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

e estão representadas na figura 4.6. Finalmente, (4.1) escreve-se agora como

$$\begin{bmatrix} \phi_1(x) \\ \phi_2(x) \\ \vdots \\ \phi_N(x) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_1 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & \psi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & \psi_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \psi_3 & \psi_4 \end{bmatrix}}_{\text{Matriz } \Psi^{\mathcal{H}} \text{ — funções de Hermite}} \begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{12} \\ d_{22} \\ \vdots \\ d_{1N} \\ d_{2N} \\ d_{31} \\ d_{41} \\ d_{32} \\ d_{42} \\ \vdots \\ d_{3N} \\ d_{4N} \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

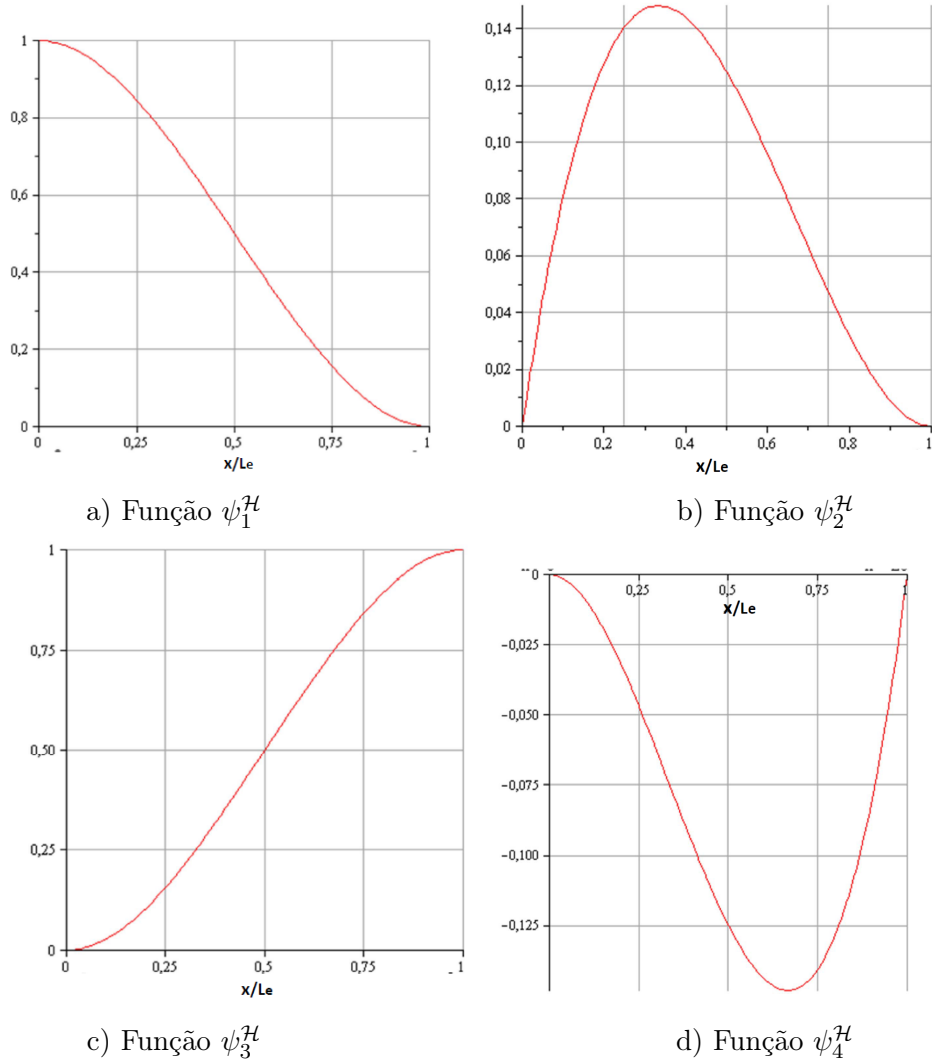


Figura 4.6: Funções de interpolação de Hermite

## 4.2 Equações discretizadas

De acordo com (4.1), o campo de deslocamentos  $\mathbf{U}$  é aproximado do seguinte modo

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}\Phi \Leftrightarrow \mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}\Psi\mathbf{d}. \quad (4.10)$$

Para o campo de deformações através de (2.35), a sua aproximação é dada por

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (\mathbf{A}^M + z\mathbf{A}^F) \bar{\mathbf{U}}\Phi = (\mathbf{A}^M + z\mathbf{A}^F) \bar{\mathbf{U}}\Psi\mathbf{d}, \quad (4.11)$$

onde,  $\boldsymbol{\varepsilon}$ ,  $\mathbf{A}^M$ ,  $\mathbf{A}^F$  e  $\bar{\mathbf{U}}$  foram definidos no Capítulo 2 e  $\Psi$  e  $\mathbf{d}$  foram dados na secção anterior.

Como na implementação efectuada se consideram apenas esforços de membrana,  $z = 0$  e as expressões podem ser significativamente simplificadas.

Assim, quando se adoptam para funções de aproximação as funções de Lagrange,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  é dado

por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^t(y) \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{\mathcal{L}} \mathbf{d} \quad (4.12)$$

em que a matriz  $\boldsymbol{\Psi}^{\mathcal{L}}$  é dada por (4.5), o vector  $\mathbf{d}$  é dado por (4.2) e  $\bar{\mathbf{U}}$  é dado por (2.27). A equação (4.12) fornece (recorde-se a hipótese (II), (2.24))

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \bar{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\Psi}_{,x} \mathbf{d} \\ \varepsilon_{yy} = \bar{\mathbf{v}}^t_{,y} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{d} = 0 \\ \gamma_{xy} = (\bar{\mathbf{u}}^t_{,y} \boldsymbol{\Psi} + \bar{\mathbf{v}}^t \boldsymbol{\Psi}_{,x}) \mathbf{d} \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.13)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\Psi}_{,x} \\ 0 \dots 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^t_{,y} \boldsymbol{\Psi} + \bar{\mathbf{v}}^t \boldsymbol{\Psi}_{,x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{d}$$

onde a matriz  $\mathbf{B}$  corresponde essencialmente a  $\mathbf{A}^M \bar{\mathbf{U}} \boldsymbol{\Psi}^{\mathcal{L}}$ .

No caso em que se utilizam para funções de aproximação as funções de hermite,  $\boldsymbol{\varepsilon}$  passa a ser dado por

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \dots 0 & \bar{\mathbf{u}}^t(y) \\ \bar{\mathbf{v}}^t(y) & 0 \dots 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}^{\mathcal{H}} \mathbf{d} \quad (4.14)$$

ou seja,

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \bar{\mathbf{u}}^t \boldsymbol{\Psi}_{,xx} \mathbf{d} \\ \varepsilon_{yy} = \bar{\mathbf{v}}^t_{,y} \boldsymbol{\Psi} \mathbf{d} = 0 \\ \gamma_{xy} = (\bar{\mathbf{u}}^t_{,y} \boldsymbol{\Psi}_{,x} + \bar{\mathbf{v}}^t \boldsymbol{\Psi}_{,x}) \mathbf{d} \end{cases} \Leftrightarrow \quad (4.15)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{u}}^t(y) \boldsymbol{\Psi}_{,xx} \\ 0 \dots 0 \\ \bar{\mathbf{u}}^t_{,y}(y) \boldsymbol{\Psi}_{,x} + \bar{\mathbf{v}}^t(y) \boldsymbol{\Psi}_{,x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} \mathbf{d}$$

e  $\mathbf{B} = \mathbf{A}^M \bar{\mathbf{U}} \boldsymbol{\Psi}^{\mathcal{H}}$ .

Tem-se assim que, em ambos os casos de interpolação,

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{d}. \quad (4.16)$$

A sua variação escreve-se

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} d\mathbf{d} \quad (4.17)$$

e a relação constitutiva incremental será

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_t d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}_t \mathbf{B} d\mathbf{d}. \quad (4.18)$$

Assim, o trabalho virtual das forças interiores (2.38) pode ser escrito como

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t \boldsymbol{\sigma} dV = - \delta \mathbf{d}^t \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (4.19)$$

o que fornece o vector das forças internas do elemento finito,  $\mathbf{Q}_e$

$$\mathbf{Q}_e = - \int_V \mathbf{B}^t \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (4.20)$$

O trabalho virtual das forças exteriores (2.39) escreve-se agora como

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\Phi}^t \bar{\mathbf{U}}^t \mathbf{f} d\Omega = \delta \mathbf{d}^t \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}^t \bar{\mathbf{U}}^t \mathbf{f} d\Omega \quad (4.21)$$

e conduz ao vector das forças equivalentes,  $\mathbf{F}_e$

$$\mathbf{F}_e = \int_{\Omega} \boldsymbol{\Psi}^t \bar{\mathbf{U}}^t \mathbf{f} d\Omega. \quad (4.22)$$

Finalmente, a linearização do trabalho virtual das forças interiores (2.41) é dado por

$$\Delta \delta W_{int} = - \int_V (\mathbf{A}^M \bar{\mathbf{U}} \delta \boldsymbol{\Phi})^t \mathbf{C}_t \mathbf{A}^M \bar{\mathbf{U}} \Delta \boldsymbol{\Phi} dV = - \delta \mathbf{d}^t \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{C}_t \mathbf{B} dV \Delta \mathbf{d} \quad (4.23)$$

e permite obter a matriz de rigidez elementar  $\mathbf{K}_e$ , dada por

$$\mathbf{K}_e = \int_V \mathbf{B}^t \mathbf{C}_t \mathbf{B} dV. \quad (4.24)$$

### 4.3 Aspectos computacionais

Para a implementação numérica de uma formulação fisicamente não-linear da GBT, através do método dos elementos finitos, foi necessário desenvolver algumas rotinas como as que se encontram sucintamente descritas nas secções seguintes e que podem ser consultadas no Anexo B. Contudo, na implementação do algoritmo de Euler (ver secção 4.3.3) foi utilizada uma rotina já desenvolvida e implementada por Gonçalves (2007).

Todas as rotinas foram elaboradas no programa de manipulação matemática simbólica MAPLE (Waterloo Maple Inc., 2001) por, entre outras vantagens, permitir tratar as operações matriciais com facilidade e rapidez.

#### 4.3.1 Obtenção da matriz de rigidez tangente global e dos vectores das forças equivalentes e forças internas globais

O processo de obtenção de  $\mathbf{K}_t$ ,  $\mathbf{F}$  e  $\mathbf{Q}$  a partir de  $\mathbf{K}_e$ ,  $\mathbf{F}_e$  e  $\mathbf{Q}_e$  está representado esquematicamente na figura 4.7 para uma discretização de uma barra em 3 elementos finitos. Esta figura pretende facilitar a compreensão de como é que se chega à composição final da matriz de rigidez tangente global e do vector das forças internas e equivalentes globais a partir das suas congêneres elementares.

Pode-se estabelecer a seguinte sequência de etapas para se determinar a matriz de rigidez e os vectores das forças equivalentes e forças internas globais:

1. Estabelecer a geometria da barra, isto é, o seu comprimento total  $L$ , a largura  $b$  e a espessura  $t$  de cada parede;

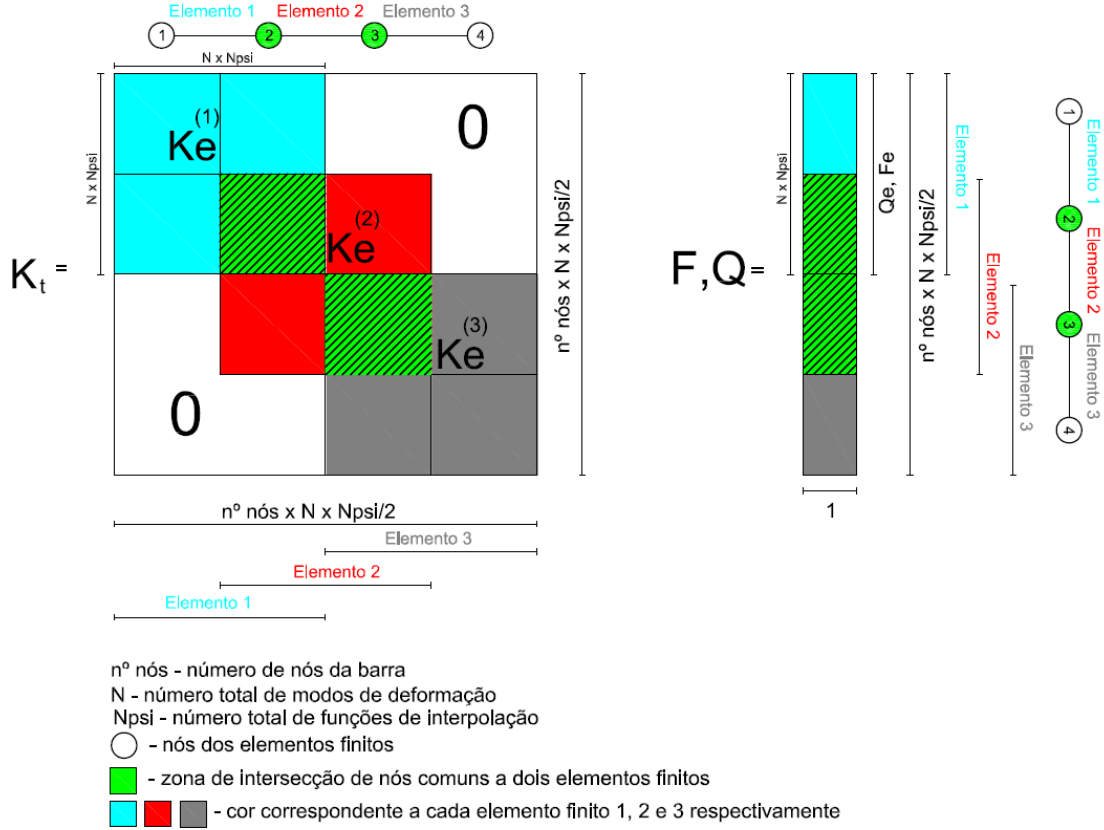


Figura 4.7: Montagem de  $K_t$ ,  $F$  e  $Q$  para uma discretização da barra com 3 elementos finitos

- Estabelecer o número de elementos finitos  $n_e$  em que se pretende dividir o comprimento total da barra  $L$  (i.e. ao longo da sua linha média). Neste trabalho considera-se sempre uma discretização uniforme, pelo que se fica com  $\frac{L}{n_e}$  troços, que correspondem ao comprimento de cada elemento finito dado por  $L_e$ . A discretização longitudinal da barra está representada na figura 4.8, exemplificada para 3 elementos finitos. Cada nó de um elemento finito tem  $N \times N_{\psi}/2$  ( $N_{\psi}$  é o número total de funções de interpolação usadas) graus de liberdade (deslocamentos generalizados) dados pelo vector  $\mathbf{d}$ ;
- Estabelecer as características físicas do material, módulo de elasticidade  $E$ , coeficiente de poisson  $\nu$ , módulo tangente na fase de endurecimento  $E_t$  e tensão de cedência  $\sigma_0$ ;
- Estabelecer o conjunto de modos de deformação da secção transversal, dado pelos vectores,  $\bar{\mathbf{u}}(y)$  e  $\bar{\mathbf{v}}(y)$ , para a análise do problema. O número total de modos de deformação é representado pela letra  $N$ ;
- Estabelecer o vector,  $\mathbf{f}$ , das cargas aplicadas ao nível da superfície média da barra. O vector  $\mathbf{f}$  é dado por  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_x \\ f_y \end{bmatrix}$ , em que  $f_x$  e  $f_y$  são a magnitude da força aplicada em cada uma das direcções<sup>1</sup>. Em todos os exemplos considerou-se  $f_x = 0$ , pelo que só existe

<sup>1</sup>Como não se consideraram termos de flexão, não se podem considerar cargas segundo  $z$  em cada parede.



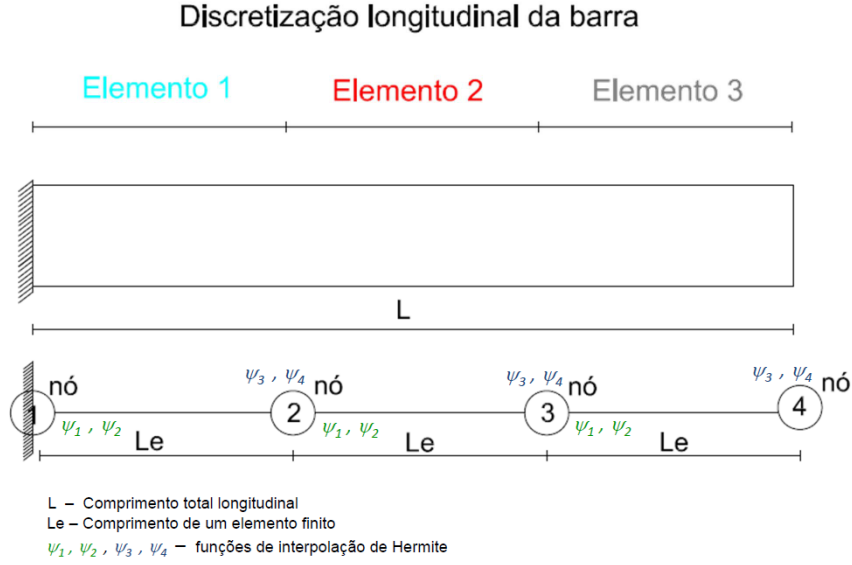


Figura 4.8: Representação da discretização longitudinal da barra ao longo da sua linha média para  $ne = 3$

força segundo a componente  $f_y$ , o que leva a  $\mathbf{f} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_y \end{bmatrix}$ ;

6. Estabelecer o conjunto de funções de interpolação  $\psi$  com que se pretende aproximar o campo de deslocamentos generalizados ao longo da barra. Estas funções são agrupadas numa matriz,  $\Psi$ , cuja forma pode ser a de (4.5) ou (4.9);
7. Estabelecer as equações do campo de deslocamentos de acordo com a GBT, conforme foi visto no Capítulo 2 na Secção 2.4;
8. Calcular  $\mathbf{K}_e$  através da equação (4.24). Em problemas não-lineares esta integração não é trivial como nos problemas lineares, visto ser necessário recorrer a uma integração numérica. Neste trabalho utilizou-se uma integração com pontos de Gauss na superfície média. Como já foi referido, como não se consideram termos de flexão, não é necessário proceder à integração numérica na espessura. Os detalhes de cada integração numérica efectuada serão fornecidos no capítulo seguinte, à medida que se introduz os exemplos ilustrativos estudados;
9. Através das matrizes de rigidez elementares,  $\mathbf{K}_e$ , obtidas para cada elemento finito e tendo em conta as condições de fronteira do problema, montar a matriz de rigidez tangente global da barra, processo que se encontra representado na figura 4.7. As matrizes de rigidez elementares posicionam-se na diagonal da matriz de rigidez global e todos os elementos fora da diagonal da matriz são nulos. Os termos associados aos graus de liberdade dos nós que são comuns a dois elementos finitos (representados a verde na figura) somam-se (representado na figura pelo tracejado verde na matriz de rigidez tangente global  $\mathbf{K}_t$ ). Aplicar as condições de fronteira cinemáticas consiste em eliminar os graus de liberdade respectivos i.e., no caso de um encastramento, as  $N \times N_\Psi/2$  linhas e colunas da matriz de rigidez global, correspondentes ao primeiro nó do primeiro

elemento finito por ser a esse nó que corresponde a posição do encastramento da barra, conforme se pode verificar na figura 4.8;

10. Calcular  $Q_e$  a partir da equação (4.20), efectuando uma integração numérica. Calcular  $F_e$  a partir de (4.22);
11. A partir dos vectores de forças internas e equivalentes elementares obtidos para cada elemento finito e tendo em conta as condições de fronteira do problema, montar os vectores de forças internas e equivalentes globais da barra. A montagem dos vectores e a aplicação das condições de fronteira cinemáticas são idênticas às que foram mencionadas para a matriz de rigidez global;

### 4.3.2 Estratégia incremental/ iterativa — método de Newton-Raphson

No contexto da determinação de trajectórias de equilíbrio não-lineares foi necessário implementar uma rotina para controlar todo o processo incremental/iterativo, o que envolve o estabelecimento dos incrementos de carga, a verificação da convergência no final de cada iteração e a actualização de todas as variáveis (deslocamentos, deformações plásticas, etc).

O método de Newton-Raphson encontra-se representado esquematicamente no gráfico da figura 4.9.

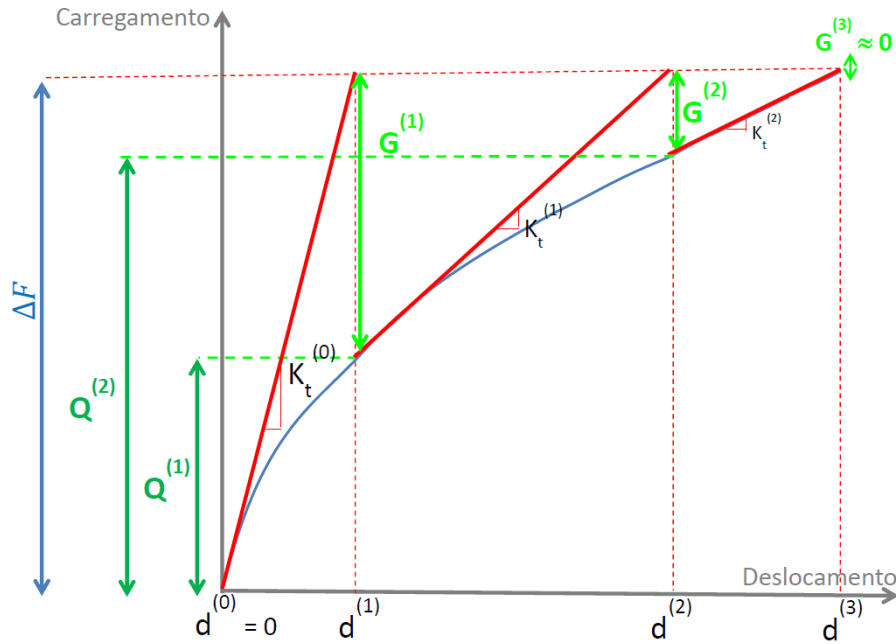


Figura 4.9: Representação gráfica do método de Newton-Raphson (para o 1º incremento de carga e para 3 iterações)

Na 1ª iteração de cada incremento

$$\Delta F = F - Q, \quad (4.25)$$

onde  $Q$  foi calculado na última iteração do incremento anterior, tem-se que:

- a matriz de rigidez tangente inicial,  $\mathbf{K}_t$ , foi calculada na última iteração do incremento anterior (no caso particular da 1ª iteração de cada incremento, a matriz de rigidez inicial é elástica);
- o vector das forças desequilibradas é dado por  $\mathbf{G} = \Delta \mathbf{F}$ , ou seja, admite-se para a 1ª iteração o incremento de forças externas aplicadas;
- o vector de deslocamentos generalizados  $\mathbf{d}$  foi calculado na última iteração do incremento anterior.

O processo iterativo segue os seguintes passos:

1. Calculam-se os incrementos de deslocamento

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{K}_t^{-1} \mathbf{G} \quad (4.26)$$

2. Os deslocamentos totais são actualizados por

$$\mathbf{d} = \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d} \quad (4.27)$$

3. Com o novo valor do vector deslocamento, todas as variáveis (deformações, tensões) são actualizadas e, através da integração numérica, calcula-se a nova matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_t$  e o vector das forças equivalentes  $\mathbf{Q}$ ;
4. Calcula-se o novo vector das forças desequilibradas:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F} - \mathbf{Q}. \quad (4.28)$$

A norma das forças desequilibradas também corresponde ao erro de cada iteração e é o parâmetro de controlo da convergência da solução. Quando  $\|\mathbf{G}^{(i)}\| \approx 0$  conclui-se o ciclo de iterações e passa-se para um novo incremento de força.

#### 4.3.3 Algoritmo de retorno à superfície de cedência — Backward Euler e determinação do operador tangente consistente

Para a actualização das tensões no final de cada iteração, é necessário verificar se o estado de tensão de um determinado ponto, se encontra dentro ou fora da superfície de cedência e proceder ao ajuste apropriado caso se encontre fora da superfície. Assim, quando o estado de tensão num ponto de integração está fora da superfície de cedência, é necessário utilizar um *algoritmo de retorno* apropriado. Para o efeito utilizou-se uma rotina existente (Gonçalves, 2007), correspondente ao algoritmo de retorno de Euler à retaguarda (Crisfield, 1991). Contudo, a utilização de um algoritmo de retorno obriga a considerar um operador constitutivo tangente diferente de (3.22), caso contrário perde-se a convergência quadrática típica do método de Newton–Raphson. Tal operador é frequentemente designado por operador constitutivo tangente *consistente*. Neste trabalho utilizou-se também uma rotina existente para calcular o operador consistente (Gonçalves, 2007), o qual é baseado no trabalho de Gruttmann *et al.* (2000). Assim, no cálculo de  $\mathbf{K}_e$  (expressão (4.24)), em vez de  $\mathbf{C}_t$ , utiliza-se o operador consistente.



## Capítulo 5

# Exemplos ilustrativos

### 5.1 Introdução

A aplicação do elemento finito elastoplástico baseado na GBT pode dividir-se em duas partes: (I) análise de uma viga com secção rectangular de parede fina (exemplo de uma secção transversal constituída por apenas uma parede) e (II) análise de um perfil metálico com secção transversal em «I» (exemplo de uma secção transversal constituída por mais do que uma parede).

Em todos os casos consideraram-se vigas em consola, sujeitas a uma carga transversal uniformemente distribuída aplicada na alma da secção de extremidade livre.

Fez-se variar:

1. o número de elementos finitos,  $ne$  (refinamento longitudinal);
2. o número de modos de deformação da secção (refinamento transversal).

### Análise de resultados

### 5.2 Secção transversal com uma parede

Para ilustrar a aplicação da formulação elastoplástica da GBT, incluindo a deformação por corte e a presença de modos locais de empenamento, no caso em que se considerou a secção transversal constituída por apenas uma parede, foram tidos em conta dois exemplos, (1) o de uma consola longa com  $L = 1,5$  m sujeita a um carregamento total de  $F = 5$  kN e (2) o de uma consola curta, em que se considerou  $L = 0,2$  m e um carregamento total de  $F = 20$  kN. A geometria das vigas e da respectiva secção transversal encontram-se representadas na figura 5.1. Adoptou-se uma lei constitutiva elastoplástica com módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa, módulo tangente na fase de endurecimento  $E_t = 50$  GPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  e tensão de cedência  $\sigma_0 = 200$  MPa. Pretende-se averiguar que tipo de elementos finitos consegue convergir mais rapidamente para a solução “exacta”, fornecida por modelos de elementos finitos de placa, efectuados com o programa de elementos finitos ADINA. Para o efeito, tiveram-se em conta dois tipos de funções de interpolação: (i) funções de Lagrange lineares e (ii) funções de interpolação de Hermite (cúbicas). As funções de interpolação e as respectivas expressões já foram abordadas na secção 4.1 do Capítulo 4. Em relação à integração numérica, considerou-se que no caso em que são usadas as funções de Lagrange (lineares), o elemento finito possui 1 ponto de integração segundo  $x$  e que no caso em que são

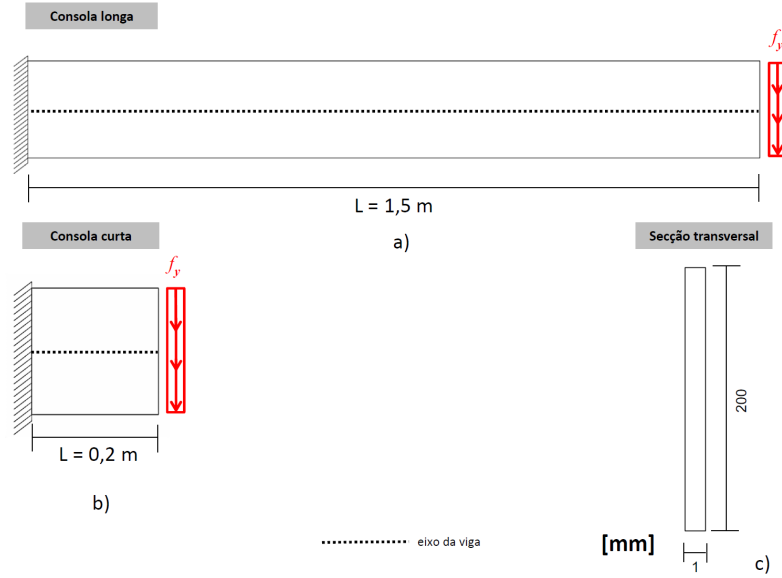


Figura 5.1: Representação da geometria das consolas a) longa, b) curta e c) da respectiva secção transversal

utilizadas as funções de Hermite (polinómios cúbicos), o elemento finito possui 3 pontos de integração segundo  $x$ . Segundo a direcção  $y$  o elemento finito possui 10 pontos de integração, uma vez que se está a considerar um material elastoplástico e, por outro lado, mesmo no caso elástico linear, alguns dos modos de deformação utilizados são dados por funções sinusoidais com um número elevado de semi-ondas.

No caso do elemento finito com funções de Lagrange, os modos de deformação usados foram os da figura 4.4 b) do Capítulo 4 para a secção sem nós intermédios, facto que é compensado pela adição de funções sinusoidais com um número crescente de semi-ondas. As expressões dos modos de deformação, para o número total de modos usados (5 modos) estão agrupadas nos vectores  $\bar{\mathbf{u}}$  e  $\bar{\mathbf{v}}$  seguintes

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 - \frac{2y}{b} \\ 0 \\ \text{sen} \left( 2\pi \frac{y}{b} \right) \\ \text{sen} \left( 4\pi \frac{y}{b} \right) \end{bmatrix}, \bar{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

em que o modo 1 representa a extensão axial, o modo 2 a flexão pura, o modo 3 o corte puro, o modo 4 e o modo 5 são iguais para os elementos de Lagrange e de Hermite, ou seja, as representações dos modos 4 e 5 correspondem às dos modos 3 e 4 da figura 5.2. O modo 4 (modo 3 para os elementos de Hermite) corresponde a uma função sinusoidal com duas semi-ondas e o modo 5 (modo 4 para os elementos de Hermite) consiste numa função sinusoidal com quatro semi-ondas.

Para os elementos finitos de Hermite, consideraram-se os modos da figura 5.2 cujas expressões, para o número total de modos usados (4 modos), estão explicitadas nos vectores  $\bar{\mathbf{u}}$

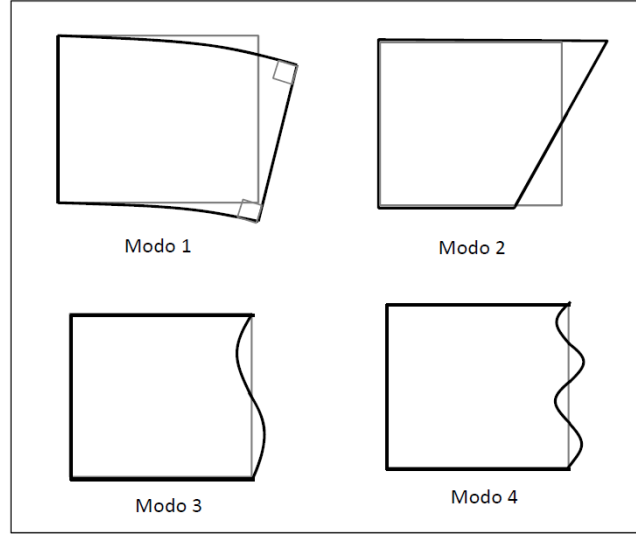


Figura 5.2: Representação dos modos de deformação para os elementos finitos de Hermite para a secção com uma parede

e  $\bar{v}$  seguintes

$$\bar{u} = \begin{bmatrix} \frac{b}{2-y} \\ \frac{b}{2-y} \\ \text{sen} \left( 2\pi \frac{y}{b} \right) \\ \text{sen} \left( 4\pi \frac{y}{b} \right) \end{bmatrix}, \bar{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

em que o modo 1 representa a flexão pura, o modo 2 corresponde ao empenamento da flexão e os restantes modos, modos 3 e 4, são modos sinusoidais de empenamento com duas semi-ondas e 4 semi-ondas respectivamente. Note-se que estes modos sinusoidais são anti-simétricos. De facto, modos de empenamento simétricos não participam na solução deste problema (flexão de uma secção simétrica).

Os resultados obtidos foram comparados com (i) os fornecidos por uma modelação com elementos finitos de placa de 4 nós, efectuada através do programa de elementos finitos ADINA, (ii) os obtidos pela teoria das peças lineares e (iii) os obtidos por Gonçalves (2007), com elementos finitos baseados na GBT em que se considera uma secção constituída por nós intermédios, funções de interpolação de Lagrange e os modos de deformação considerados são os que estão representados na figura 4.4 a) (para a secção com nós intermédios). Estes últimos resultados encontram-se representados na legenda dos gráficos na forma "nº de paredes × nº de EF", em que aqui paredes entende-se como o número de subdivisões da secção. A malha de elementos finitos e a deformada das consolas a) longa e b) curta, obtidas com o programa ADINA, estão representadas na figura 5.3.

A apresentação dos resultados é feita de forma separada para o exemplo (1) consola longa e (2) consola curta e, dentro de cada exemplo, de acordo com (i) funções de interpolação de Lagrange e (ii) funções de Hermite.

### 5.2.1 Consola longa — $L = 1,5 \text{ m}$

Nos gráficos da figura 5.4, para elementos finitos de Lagrange, e no gráfico da figura 5.5, para elementos finitos de Hermite, mostram-se as trajectórias de equilíbrio em função do número

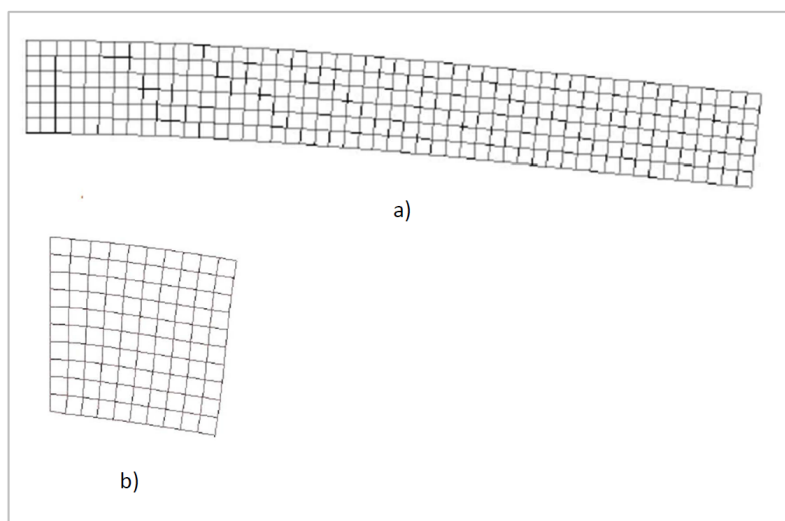


Figura 5.3: Representação da malha de elementos finitos e da deformada obtidas com o programa ADINA para as consolas a) longa e b) curta

de elementos finitos e de modos de deformação para uma consola longa. No gráfico da figura 5.6 mostra-se a solução com maior discretização que foi conseguida com elementos finitos de Lagrange. Finalmente, nas tabelas A.1 e A.2 do Anexo A podem ser consultados os valores resultantes da análise deste exemplo.

### (a) Funções de interpolação de Lagrange

Nos gráficos da figura 5.4 encontram-se os resultados obtidos com elementos finitos de Lagrange. Para cada conjunto de modos fez-se variar o número de EF até a solução se aproximar melhor dos resultados do modelo com elementos de placa (ADINA). Os resultados obtidos com a GBT praticamente coincidem com os da teoria das peças lineares (Euler-Bernoulli), que para o caso de uma consola longa pode ser considerada “exacta”, o que permite concluir que a deformação por corte não é significativa. Por esta razão a solução obtida com apenas 3 modos já é bastante precisa.

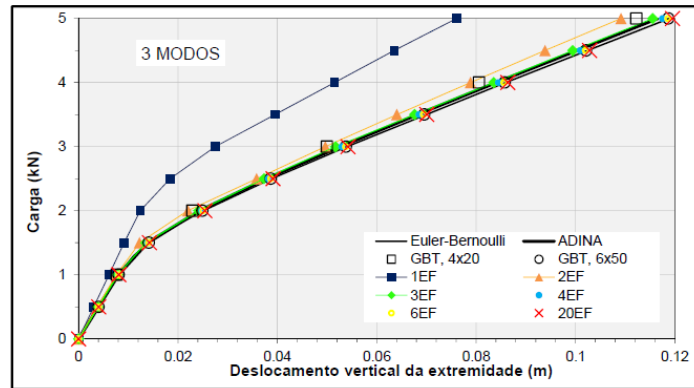
Quando se comparam estes resultados com os obtidos por Gonçalves (2007), para a secção com nós intermédios, percebe-se que é mais vantajoso considerar a secção sem nós intermédios e modos com um número crescente de semi-ondas. De facto, uma solução precisa com a discretização da secção com nós intermédios obriga a uma discretização longitudinal da barra com 20 e 50 EF, face aos apenas 4 EF que são necessários para secção sem nós intermédios.

### (b) Funções de interpolação de Hermite

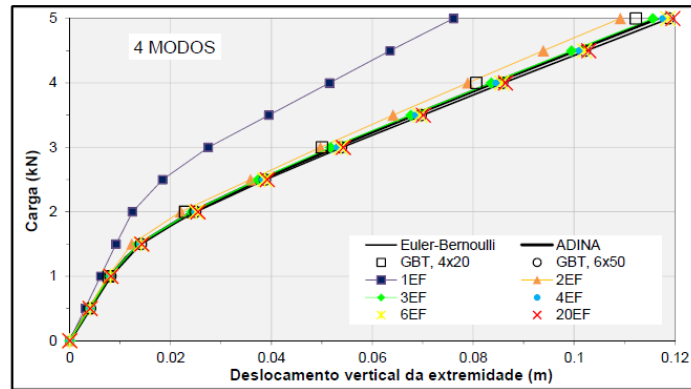
No gráfico da figura 5.5 estão representados os resultados obtidos para a mesma consola longa mas agora aproximada por elementos finitos de Hermite. É clara a superioridade deste elemento, já que a solução converge para a solução de Euler-Bernoulli com apenas 1 modo de deformação e 1 EF. A comparação do gráfico da figura 5.6, onde estão agrupadas as soluções obtidas com o elemento finito de Lagrange, com o gráfico da figura 5.5, solução para o elemento finito de Hermite, evidencia a precisão deste elemento face ao elemento finito de Lagrange. Com elementos finitos de Lagrange são necessários pelo menos 3 modos de



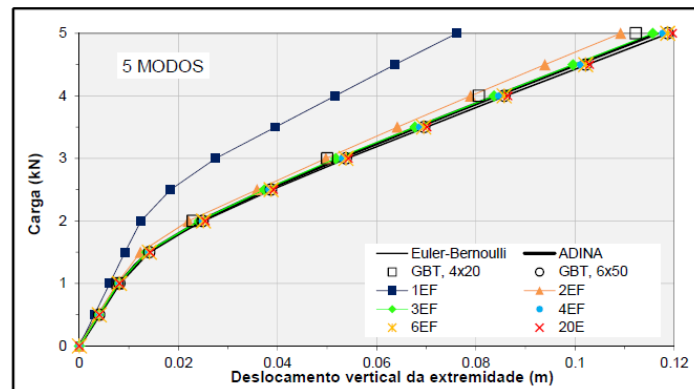
## 5.2. Secção transversal com uma parede



A) 3 Modos



B) 4 Modos



C) 5 Modos

Figura 5.4: Consola longa com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange

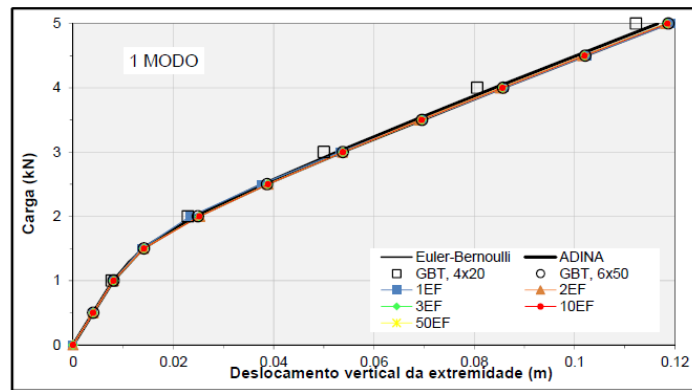


Figura 5.5: Consola longa com seção rectangular: elementos finitos de Hermite

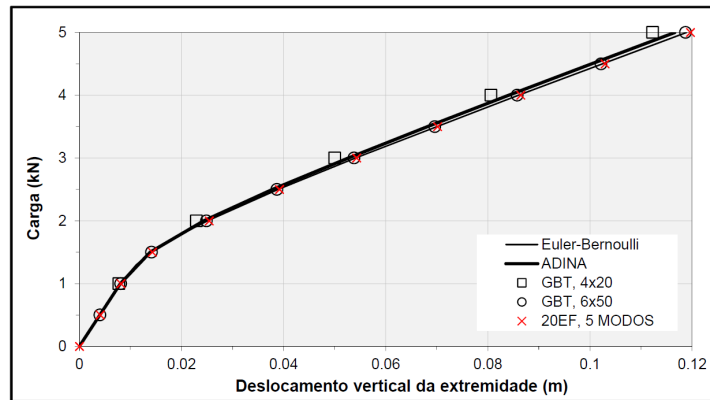


Figura 5.6: Consola longa com seção rectangular: resultados dos modelos mais refinados de elementos finitos de Lagrange

deformação e 6 EF para a solução convergir para a das peças lineares, ao passo que, com elementos finitos de Hermite são necessários apenas 1 EF e 1 modo de deformação, o modo 1 de flexão pura da figura 5.2. Através da observação do gráfico da figura 5.5, verifica-se que não existe vantagem significativa em aumentar o número de elementos finitos pois, praticamente não existem diferenças na precisão da solução, quando se passa de 1 EF para 2EF ou até mesmo para 10 EF.

### 5.2.2 Consola curta — $L = 0,2 \text{ m}$

Tal como no exemplo anterior (consola longa), nos gráficos da figura 5.7 para elementos finitos de Lagrange e nos gráficos das figuras 5.8 e 5.9 para os elementos finitos de Hermite, mostram-se os resultados das trajectórias de equilíbrio obtidos em função do número de elementos finitos e de modos de deformação. Nos gráficos das figuras 5.10 e 5.11 estão representadas as soluções obtidas, para as funções de interpolação de Lagrange e de Hermite, com a maior discretização e para cada conjunto de modos. Finalmente, agruparam-se os valores das análises feitas com elementos finitos de Lagrange e de Hermite nas tabelas A.3, A.4 e A.5 do Anexo A.

### (a) Funções de interpolação de Lagrange

Através da análise do gráfico da figura 5.7 percebe-se, como seria de esperar, que quanto mais EF se consideram na análise, melhor é a solução obtida. Desta forma, uma das conclusões que se pode referir, desde já, é que a pior solução é obtida quando apenas se considera 1 EF na discretização longitudinal da barra. Este facto é comum a todos os conjuntos de modos considerados na análise. Também se observa que, à medida que se aumenta o número de modos, vão sendo sucessivamente necessários menos EF para se obterem bons resultados. Nomeadamente, quando se passa de 3 para 5 modos, em que para 3 modos uma boa solução só era conseguida recorrendo a 10 EF, quando se passa para 5 modos são necessários apenas 4 EF, o que representa uma razoável economia de esforço computacional e mostra, mais uma vez, ser vantajoso considerarem-se modos com funções sinusoidais. Numa consola curta a deformação por corte (modo 3) e o empenamento têm um papel significativo, e será por essa razão, que considerar os modos 4 e 5, conduz a uma solução mais precisa e com recurso a menos graus de liberdade.

Também se constata que existe um número limite de EF a partir do qual já não se vêm resultados substancialmente diferentes dos obtidos com um número inferior de EF. É o que acontece quando na análise dos gráficos da figura 5.7 se percebe que não há vantagens em considerar-se um número de EF superior a 10.

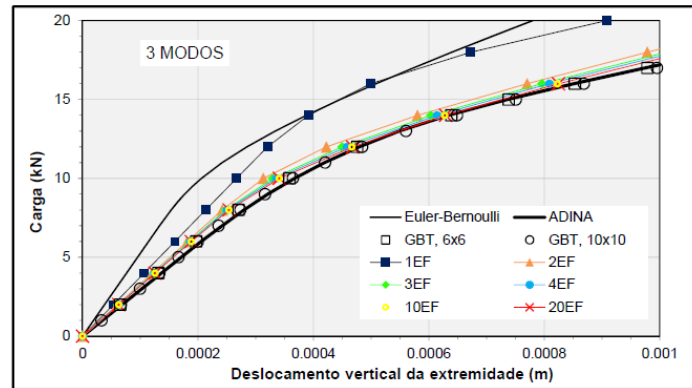
Ao comparar-se a solução obtida através da GBT com a da teoria das peças lineares (Euler-Bernoulli) é notória a diferença que existe entre os resultados. Contudo, esta diferença não é de estranhar, visto tratar-se, como já foi referido, de uma consola curta, onde a deformação por corte e o empenamento desempenham um papel relevante, fenómenos para os quais a teoria de Euler-Bernoulli não fornece resultados aceitáveis.

Verifica-se que, ao considerar-se uma secção sem nós intermédios mas com funções que admitem um número crescente de semi-ondas, se obtêm melhores resultados em termos de elementos finitos. As melhores soluções, para a secção transversal constituída por nós intermédios e elementos finitos de Lagrange (Gonçalves, 2007), foram conseguidas com 6 EF e 10 EF, enquanto que, considerando a secção sem nós intermédios, são necessários apenas 4 EF e 4 modos de deformação, para os resultados obtidos serem idênticos.

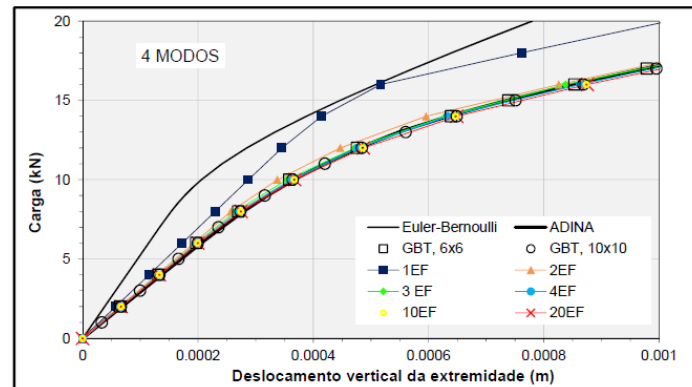
### (b) Função de interpolação de Hermite

Nos gráficos das figuras 5.8 e 5.9 apresentam-se os resultados obtidos para a consola curta com elementos finitos de Hermite. É notória, mais uma vez, a diferença entre este elemento finito e o elemento finito de Lagrange, já que com 2 modos de deformação e com 1 EF apenas se conseguem resultados precisos (em comparação com a solução obtida através do programa de elementos finitos ADINA). Com o elemento finito de Lagrange e com apenas 1 EF nunca se obtiveram soluções aceitáveis. É de salientar também que se conseguiram obter resultados aceitáveis com recurso a um número menor de modos de deformação, 4 modos no máximo em vez de 5. Verifica-se que se conseguem obter boas aproximações a partir de 2 modos de deformação, enquanto que com o elemento finito de Lagrange, o mesmo só era possível a partir de 3 modos.

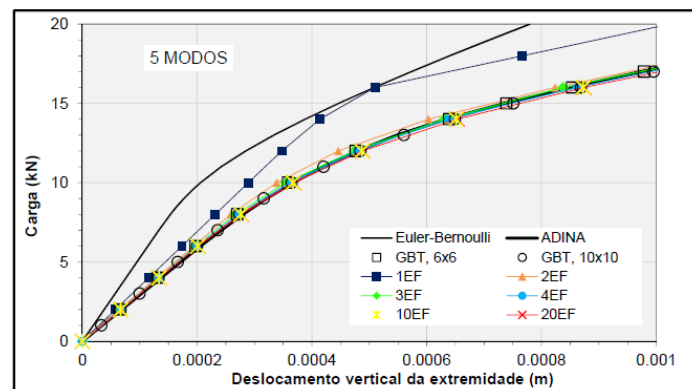
No gráfico da figura 5.11 mostram-se os resultados que dizem respeito à melhor solução obtida em termos de EF para cada conjunto de modos de deformação. Mais uma vez, à medida que se aumenta o número de modos de deformação são necessários cada vez menos EF para se alcançarem boas soluções. Com 3 modos e 3 EF obtém-se já uma solução praticamente coincidente com a dada pelo programa de elementos finitos ADINA. Para a consola curta



A) 3 Modos



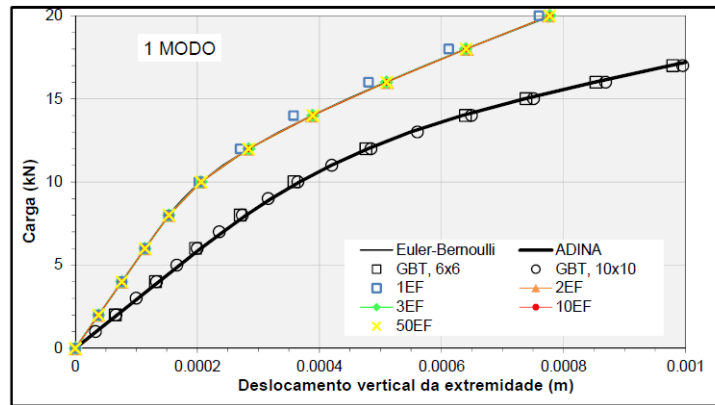
B) 4 Modos



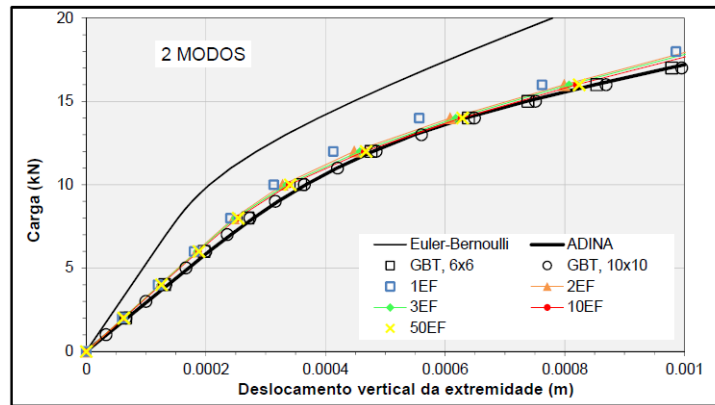
C) 5 Modos

Figura 5.7: Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange

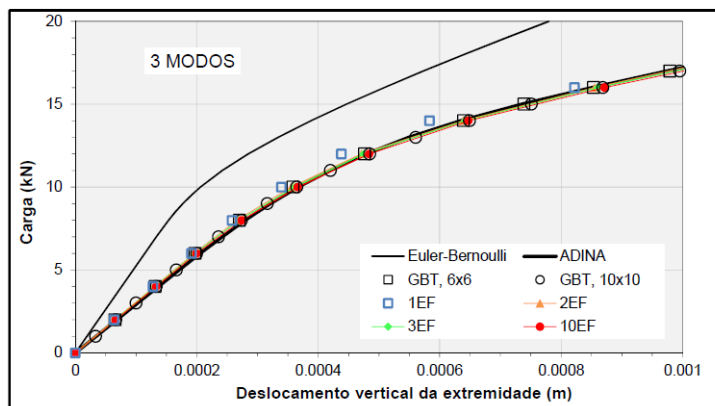
## 5.2. Secção transversal com uma parede



A) 1 Modo

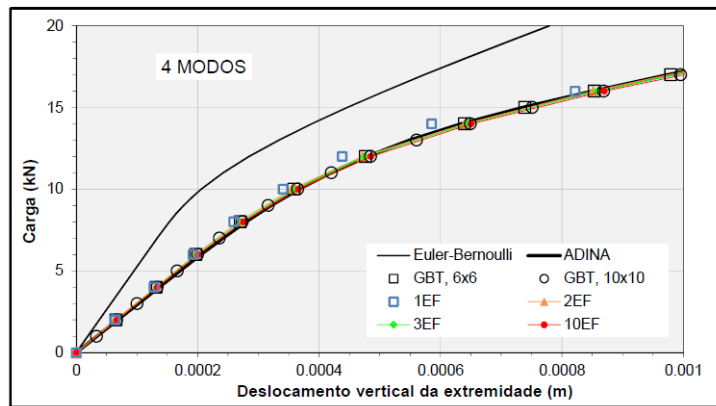


B) 2 Modos



C) 3 Modos

Figura 5.8: Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (para 1, 2 e 3 Modos)



D) 4 Modos

Figura 5.9: Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (para 4 Modos)

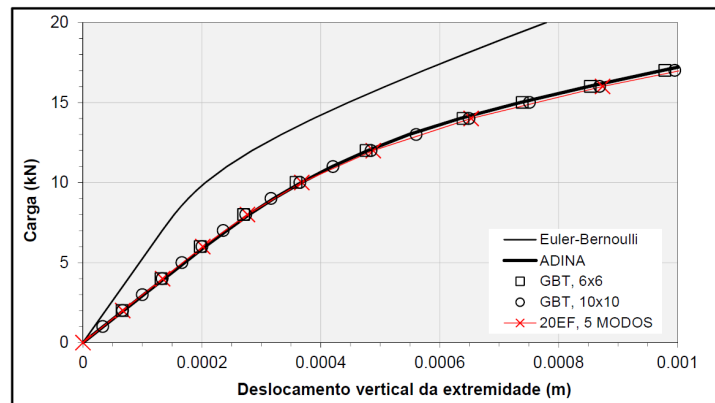


Figura 5.10: Consola curta com secção rectangular: resultados dos modelos mais refinados de elementos finitos de Lagrange

com elementos finitos de Hermite, não é tão evidente a vantagem na utilização de modos de deformação com funções sinusoidais, uma vez que de 3 para 4 modos são necessários os mesmos 3 EF para se obter uma aproximação razoável da solução, o que mostra a pouca participação destes modos para a solução final. Comparando os resultados da GBT, obtidos para uma secção sem nós intermédios, com os resultados obtidos por Gonçalves (2007), para uma secção com nós intermédios, constata-se que são necessários menos elementos finitos para se atingir o mesmo resultado, pelo que considerar uma secção sem nós intermédios mostra ser mais vantajoso.

Finalmente, em síntese, para uma consola curta aproximada por elementos finitos de Lagrange e elementos finitos de Hermite, apresentam-se os gráficos das figuras 5.10 e 5.11. Nestes gráficos estão agrupadas as soluções mais refinadas obtidas para ambos os elementos finitos e a partir destes gráficos mostra-se evidente a vantagem na utilização dos elementos finitos de Hermite face aos de Lagrange. A utilização de elementos finitos de Hermite representa uma economia de esforço computacional, visto estarem envolvidos menos EF na discretização longitudinal e menos modos de deformação na discretização transversal da barra.

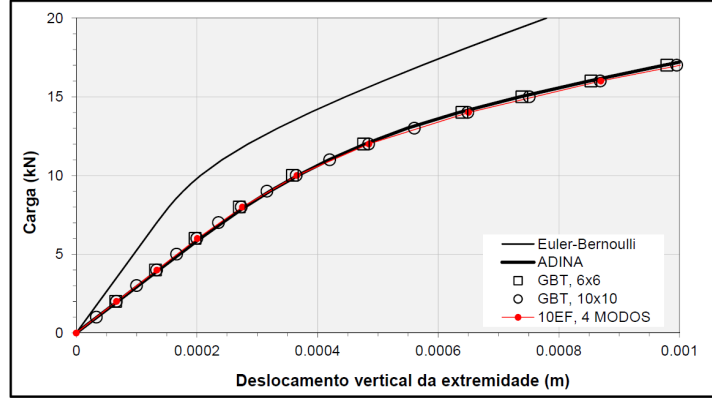


Figura 5.11: Consola curta com secção rectangular: resultados dos modelos mais refinados de elementos finitos de Hermite

### 5.3 Secção transversal em «I»

Neste exemplo a secção transversal da consola tem geometria em «I», pelo que, o problema passa a ter de incluir a análise de uma secção constituída por mais do que uma parede. É analisada uma viga em consola com comprimento  $L = 2\text{m}$ , representada na figura 5.12.

Como se referiu anteriormente, a viga está sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída aplicada na alma da secção de extremidade livre. A carga máxima aplicada foi de 880 kN. Tirando partido das condições de simetria/anti-simetria, considerou-se que a secção é constituída por duas paredes (i) metade do banzo superior, a que se chamou parede 1 e (ii) metade da alma, parede 2 conforme se mostra na figura 5.13 (modelou-se apenas 1/4 da viga). Por essa razão, considerou-se também um quarto do carregamento total aplicado na barra. Admite-se a mesma lei constitutiva elastoplástica que foi considerada no exemplo anterior à excepção da tensão de cedência, que passa a ser  $\sigma_0 = 235\text{ MPa}$ . As funções de interpolação consideradas foram as de Hermite. Na integração numérica consideraram-se 3 pontos segundo  $x$  e 10 pontos segundo  $y$ . Os modos de deformação que foram tidos em conta nesta situação são os da figura 5.14 e cujas expressões estão explicitadas nos vectores  $\bar{\mathbf{u}}_1$  e  $\bar{\mathbf{v}}_1$ , para o banzo e  $\bar{\mathbf{u}}_2$  e  $\bar{\mathbf{v}}_2$  para a alma, ou seja,

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{h_w}{2} \\ 0 \\ y \\ \frac{\sin(\pi y)}{B/2} \\ 0 \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{v}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{u}}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{h_w}{2} - y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\sin(\pi y)}{h_w/2} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{v}}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

O modo 1 corresponde à flexão pura, o modo 2 ao corte puro, o modo 3 consite numa função linear de empenamento do banzo, o modo 4 corresponde a uma função de empenamento com uma semi-onda (função sinusoidal) em metade do banzo (duas semi-ondas no banzo) e,

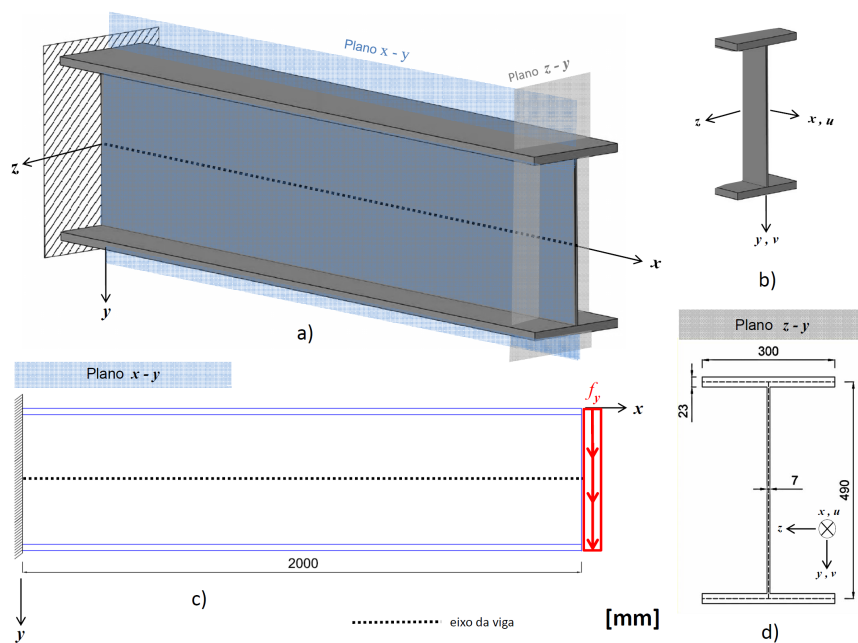


Figura 5.12: Consola com secção em «I»: geometria e comprimento

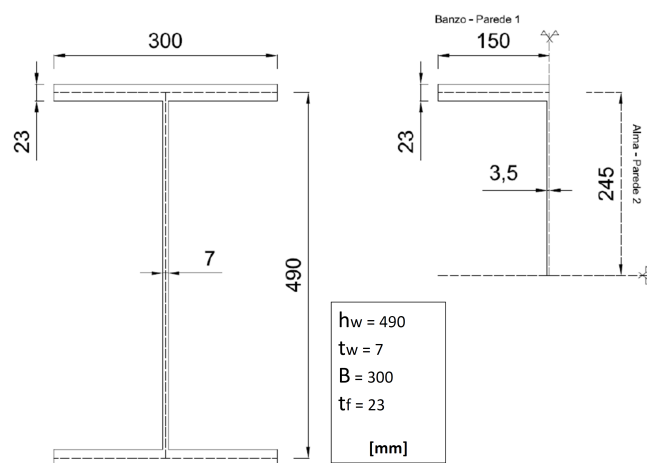


Figura 5.13: Geometria da secção em «I» e respectiva simplificação de simetria/anti-simetria



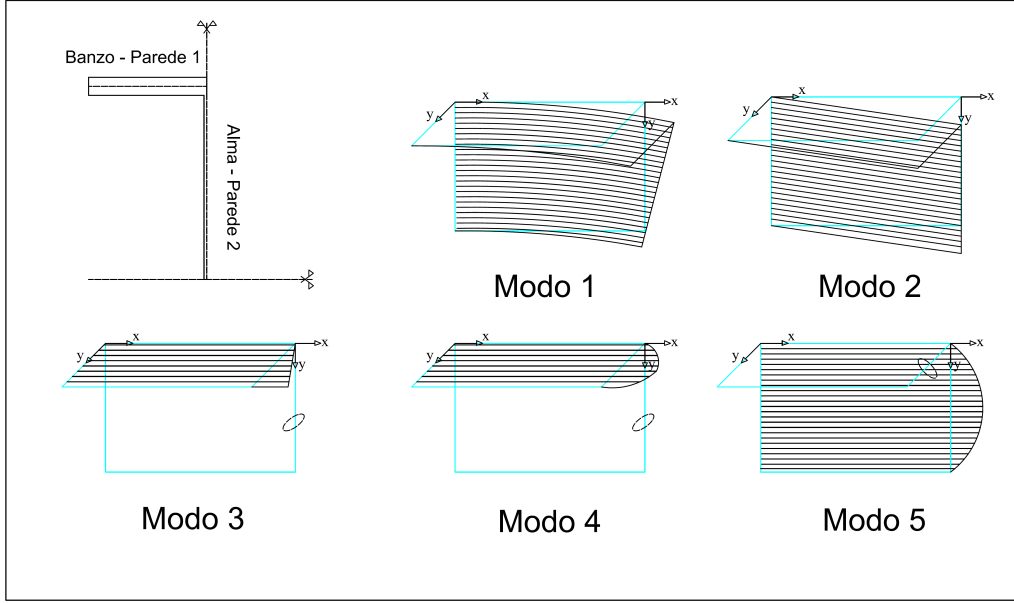


Figura 5.14: Primeiros 5 modos de deformação da secção em «I» considerados na análise da GBT

finalmente, o modo 5 corresponde a uma função sinusoidal de empenamento com uma semi-onda em metade da alma (duas semi-ondas na alma). Para além destes 5 modos de deformação ainda foram considerados mais dois modos de empenamento no banzo, que consistem em funções sinusoidais com 2 e 3 semi-ondas (em metade do banzo), a que se passará a chamar modos 6 e 7. As expressões destes modos estão agrupadas nos novos vectores  $\bar{\mathbf{u}}_1$  e  $\bar{\mathbf{v}}_1$ , para o banzo e  $\bar{\mathbf{u}}_2$  e  $\bar{\mathbf{v}}_2$  para a alma, i.e. estes novos vectores são dados pelos anteriores, expressões (5.3), mas agora para o caso em que se consideram 7 modos, ou seja

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_1 &= \begin{bmatrix} \frac{h_w}{2} \\ 0 \\ y \\ \frac{\text{sen}(\pi y)}{B/2} \\ 0 \\ \frac{\text{sen}(2\pi y)}{B/2} \\ \frac{\text{sen}(3\pi y)}{B/2} \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{v}}_1 &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{\mathbf{u}}_2 &= \begin{bmatrix} \frac{h_w}{2} - y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\text{sen}(\pi y)}{h_w/2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, & \bar{\mathbf{v}}_2 &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Estes modos, 6 e 7, serão considerados mais à frente na secção 5.3.3, para a determinação das tensões.

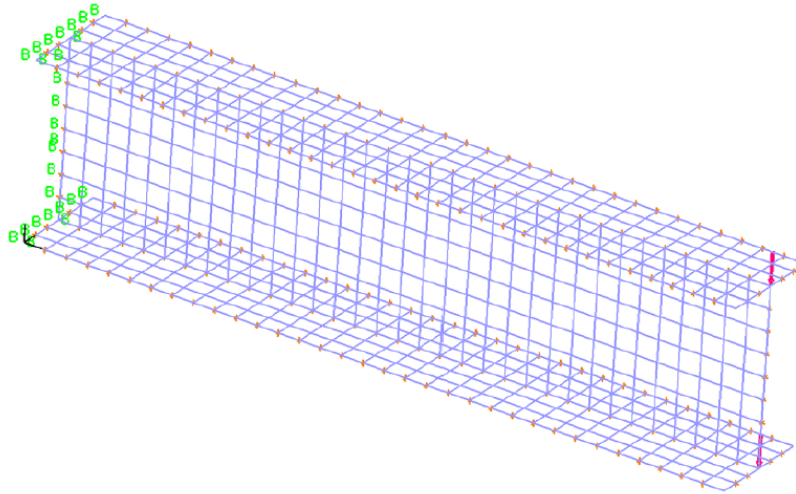


Figura 5.15: Representação da malha de elementos finitos do programa ADINA (660 elementos finitos de casca)

Foram determinadas as trajectórias de equilíbrio carga/deslocamento que estão representadas nos gráficos da figura 5.16 para o caso em que se consideram a) 2 e b) 5 modos de deformação e discretizações com 2 e 6 EF. No gráfico c) da figura 5.16 comparam-se as soluções obtidas para cada um dos conjuntos de modos de deformação utilizados. Também se obtiveram os resultados em termos de participação modal. Esta análise é interessante, e constitui uma das vantagens da GBT conseguir perceber a contribuição que cada modo de deformação tem na deformada da barra. Estes resultados encontram-se representados no gráfico da figura 5.20. Finalmente, obtiveram-se os gráficos das figuras 5.21 e 5.22 que descrevem o andamento das tensões tangenciais no banzo. Para a análise das tensões tangenciais foram estudados casos em que se considera um número crescente de modos de deformação até que a solução da GBT se aproxime da solução obtida com elementos finitos de casca (ADINA). A precisão da solução vai variando para cada conjunto de modos considerado. Foram estudados casos até ao número máximo de 7 modos.

As soluções obtidas na análise com a GBT foram comparadas com uma modelação com elementos finitos do tipo casca, com 4 nós, através do programa ADINA e cuja malha está representada na figura 5.15.

### 5.3.1 Deslocamentos

Da observação dos gráficos a) e b) da figura 5.16 percebe-se que não existe uma diferença substancial em aumentar-se o número de elementos finitos, já que a partir de 4 EF se obtêm soluções bastante aproximadas da solução de elementos finitos fornecida pelo programa ADINA. No gráfico c) da mesma figura, comparam-se as soluções obtidas para cada conjunto de modos, e constata-se que a melhor solução obtida consiste em considerar 4 EF, quer se usem 2 ou 5 modos de deformação. Não são necessários mais graus de liberdade (neste caso,

número de EF), já que a solução obtida com 4 EF já é bastante próxima da solução obtida com o programa ADINA.

Os resultados da figura 5.16 também permitem observar que não se notam diferenças significativas entre as soluções obtidas recorrendo a 2 ou 5 modos de deformação. Constata-se que a solução obtida com 2 modos já é suficientemente aproximada da solução de elementos de casca. Isto mostra que os modos da figura 5.14 que mais participam são os 1º e 2º modo, o de flexão pura e corte puro, respectivamente. Os restantes 3 modos têm uma reduzida participação, pois de outra forma seriam claras as diferenças entre usar uma solução aproximada com 2 e 5 modos de deformação.

A análise dos gráficos da figura 5.16, ao contrário do que seria de esperar, permite observar que a solução obtida com os elementos finitos de casca (ADINA) é sensivelmente mais rígida na fase elástica que a solução da teoria das peças lineares (representada na legenda dos gráficos por TPL). Este resultado deve ser consequência de um erro cometido na modelação com elementos finitos de casca feita no programa ADINA, contudo o erro não foi descoberto, apesar de terem sido feitas várias tentativas nesse sentido. Os resultados da GBT, apesar de ligeiramente mais rígidos que os resultados obtidos com a solução da TPL, mostram ter maior precisão na fase elástica, que os obtidos com os elementos finitos de casca.

### 5.3.2 Participação Modal

O gráfico da figura 5.20 mostra os resultados da participação modal, para os primeiros 5 modos de deformação, obtidos para a barra discretizada com 4 EF e para o último incremento de carga 880 kN. A discretização da barra com 4 EF conduziu a resultados precisos (recorrendo a um menor número de EF) e por isso, optou-se por considerar a barra assim discretizada, tal como se mostra na figura 5.17. A participação dos modos de deformação é obtida através das funções de amplitude  $\phi_k$ , abordadas na secção 4.1 do Capítulo 4. A partir da equação (4.1) dada por

$$\Phi = \Psi d$$

e, conhecendo-se o vector  $d$ , visto que a matriz das funções de aproximação  $\Psi$  é conhecida, obtem-se a matriz das funções de amplitude  $\Phi$ . Para cada um dos elementos finitos da discretização da barra, as expressões das funções de interpolação e os respectivos vectores  $d$  estão apresentados na figura 5.18 para o último nível de carga (880 kN).

A deformada final da barra, para este nível de carga, obtida através do programa de elementos finitos ADINA, está representada na figura 5.19.

O gráfico da figura 5.20, para o troço  $x = 0$  a  $x = 0,5$  m, que corresponde ao 1º elemento finito, permite observar para o primeiro nó deste elemento ( $x = 0$ , coincide com a posição do encastramento), que como seria de esperar em virtude das condições de fronteira,  $\phi_1 = 0$  e  $\phi_{1,x} = 0$ . A uma distância de  $x = 0,5$  m do encastramento as funções de amplitude dos modos 1, flexão pura e 2, corte puro, da figura 5.14 começam a ter alguma expressão. A esta distância do encastramento o modo 2, corte puro tem uma participação maior que o modo 1, de flexão pura.

Para o 2º elemento finito, troço  $x = 0,5$  a  $x = 1$  m, observar-se o crescimento das amplitudes, mais uma vez, dos modos 1 e 2, novamente os mais participativos. O modo 2, corte puro, continua a ter uma amplitude superior ao modo 1, de flexão pura, contudo, se no 1º elemento essa diferença era mais evidente, no 2º elemento, os modos 1 e 2 parecem estar a aproximar-se, coincidindo na zona de meio vão da barra  $x = 1$  m. Em relação aos modos de empenamento, modos 3, 4 e 5, apresentam valores praticamente nulos. Em síntese, até à

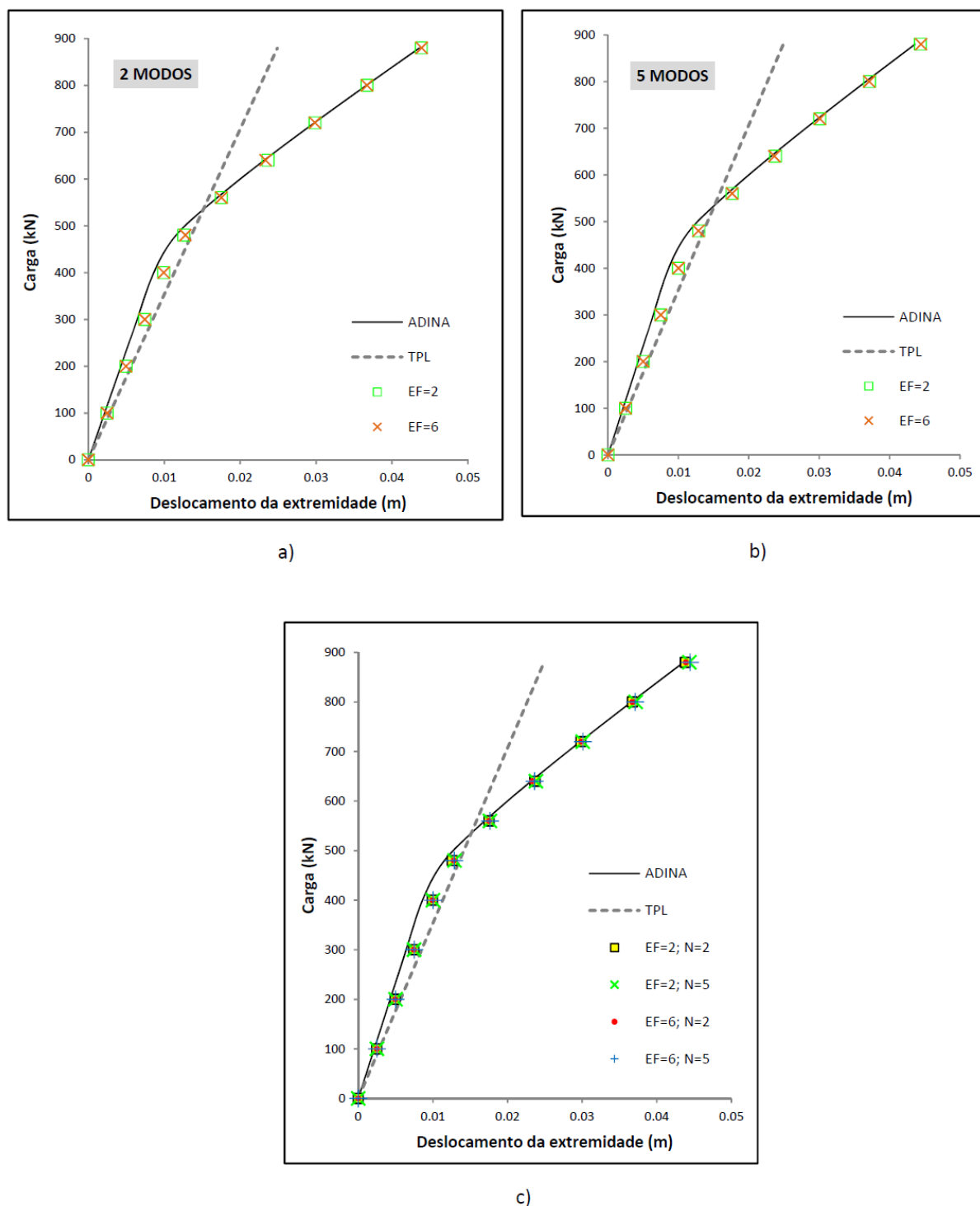


Figura 5.16: Comparação das soluções de elementos finitos: a) para 2 modos b) para 5 modos e c) para o conjunto das soluções com 2 e 5 modos

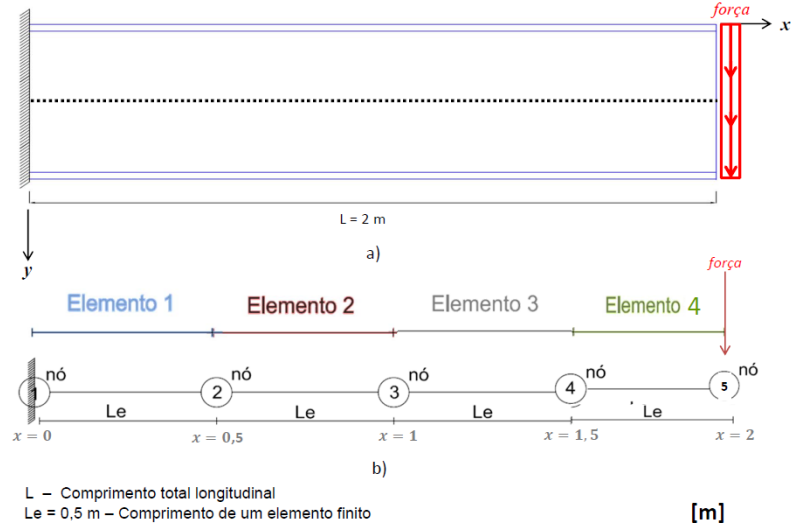


Figura 5.17: Representação a) do perfil com secção em «I» e b) discretização da barra com 4 elementos finitos

a)

$d1 =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,0009906380876 \\ 0,0002294965821 \\ 0 \\ 0,000009344623350 \\ 0 \\ 0,000008799563902 \\ 0 \\ 0,002789793258 \\ 0,01015727621 \\ 0,004733691678 \\ 0,009930405352 \\ 0,00003879042701 \\ 0,00003385001055 \\ -0,00001352596760 \\ 0,00002301394131 \\ -0,00001828788814 \end{bmatrix}$	$d2 =$	$\begin{bmatrix} 0,002789793258 \\ 0,01015727621 \\ 0,004733691678 \\ 0,009930405352 \\ 0,00003879042701 \\ 0,00003385001055 \\ -0,00001352596760 \\ 0,00002301394131 \\ -0,00001828788814 \\ 0,009361552144 \\ 0,01539219882 \\ 0,009411073832 \\ 0,01260876693 \\ 0,00009666812371 \\ -0,0003879042701 \\ 0,00003385001055 \\ -0,00001352596760 \\ 0,00002301394131 \\ -0,00001828788814 \end{bmatrix}$
--------	---	--------	---

b)

$EF_1$	$\begin{aligned} \phi_1 &= -0,00400758729 x^3 + 0,01316296668 x^2 \\ \phi_2 &= 0,00360807806 x^3 - 0,00268203406 x^2 + 0,009906380876 x \\ \phi_3 &= 0,0002294965821 + 0,002120328234 x^3 - 0,001978150445 x^2 + 0,005878626074 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_4 &= 0,000009344623350 + 0,00009541010320 x^3 - 0,00008508354500 x^2 + 0,0002297600450 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_5 &= 0,000008799563902 + 0,00006764146984 x^3 - 0,00006901899052 x^2 + 0,0009819281626 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \end{aligned}$
$EF_2$	$\begin{aligned} \phi_1 &= 0,01015727621 x + 0,002789793258 - 0,00295024209 x^3 + 0,00744760412 x^2 \\ \phi_2 &= 0,009930405352 x + 0,004733691678 + 0,01531854266 x^3 - 0,0088105454 x^2 \\ \phi_3 &= -0,0003879042701 x + 0,0001377802986 - 0,0002616889124 x^3 + 0,0003555318022 x^2 + 0,004124506612 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_4 &= -0,00001352596760 x + 0,000003385001055 + 5,4840426 \cdot 10^{-7} x^3 + 0,00000523772885 x^2 + 0,0001622246483 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_5 &= -0,00001828788814 x + 0,00002301394131 - 0,0000314859605 x^3 - 0,0000397370086 x^2 + 0,0007297723021 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \end{aligned}$
$EF_3$	$\begin{aligned} \phi_1 &= 0,01539219882 x + 0,009361552144 - 0,0012067038 x^3 + 0,00286567210 x^2 \\ \phi_2 &= 0,01260876693 x + 0,009411073832 - 0,03154962438 x^3 + 0,0300831836 x^2 \\ \phi_3 &= -0,0002286391526 x + 0,00009666812371 + 0,0000219485578 x^3 + 0,0000596315308 x^2 + 0,003748235419 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_4 &= -0,000007876935555 x + 0,000003802140195 + 0,00000880855365 x^3 - 0,00000385896650 x^2 + 0,0001533089156 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_5 &= -0,00008163936723 x + 0,00001710403833 - 0,00009025575897 x^3 + 0,0001399904606 x^2 + 0,0004078120566 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \end{aligned}$
$EF_4$	$\begin{aligned} \phi_1 &= 0,01735284156 x + 0,01762323135 - 0,0008851827 x^3 + 0,00130546242 x^2 \\ \phi_2 &= 0,01902973229 x + 0,01929255216 - 0,00614812514 x^3 + 0,0054491516 x^2 \\ \phi_3 &= -0,0001525462027 x + 0,00008784926762 + 0,0000919473740 x^3 - 0,0000922783516 x^2 + 0,00002366746132 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_4 &= -0,000005129486812 x + 0,000003593177708 + 0,00000732789422 x^3 - 0,0000077768432 x^2 - 0,00002016484838 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \\ \phi_5 &= -0,000009340725843 x + 0,000009558095076 + 0,00002477777464 x^3 - 0,00003193981595 x^2 - 0,00001475624661 x^2 (0,5000000000 - x)^2 \end{aligned}$

Figura 5.18: Expressões obtidas para a) os vectores de deslocamento generalizado  $d$  e b) as funções de amplitude modal  $\phi_k$  para cada elemento finito e para 880 kN

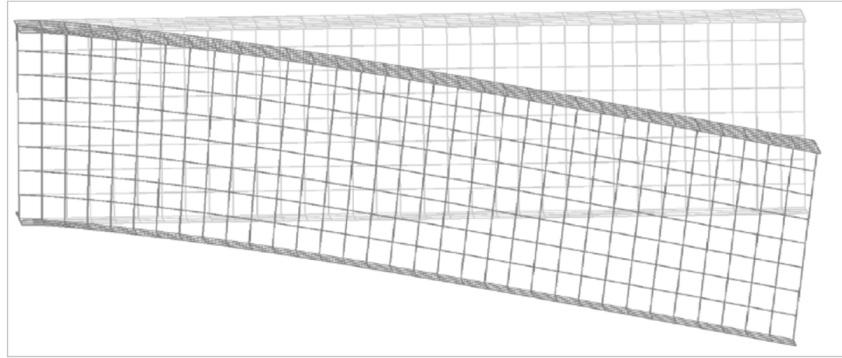


Figura 5.19: Representação da deformada final da barra com elementos finitos de casca (ADINA) obtida para o último nível de carga (880 kN)

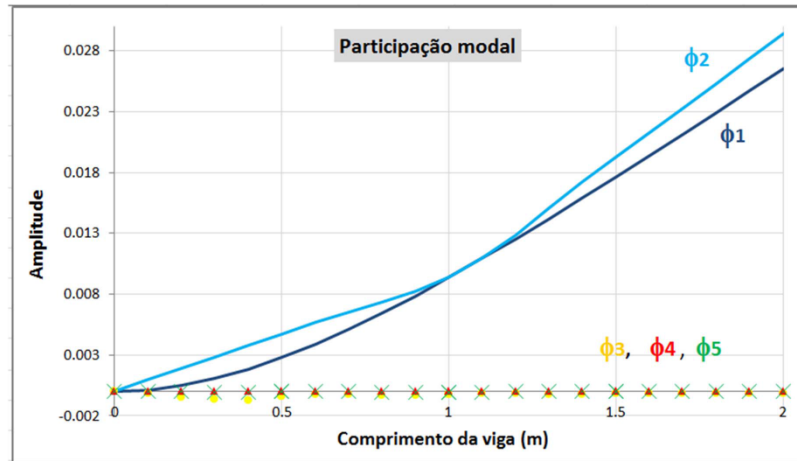


Figura 5.20: Representação das funções de participação modal dos primeiros 5 modos para 880 kN

zona de meio vão da viga, percebe-se que os modos 1 e 2 são os que têm maior participação na deformada da barra, sendo o modo de corte puro, o modo 2, o mais participativo. Os modos 3, 4 e 5 praticamente não influenciam a deformada da barra.

Para o 3º elemento finito que corresponde, aproximadamente, à zona de meio vão da barra, troço  $x = 1$  a  $x = 1,5$  m, a situação mantém-se e o modo 2 de corte continua ser mais participativo que o modo 1 de flexão pura. Neste troço as amplitudes dos modos 1 e 2 continuam a crescer e as dos restantes modos mantém-se praticamente nulas.

Finalmente, para o 4º e último elemento finito, que corresponde ao troço de extremidade,  $x = 1,5$  a  $x = 2$  m, da barra e onde está aplicada a carga, nota-se que o modo 2 de corte, continua a ser o mais participativo. Nesta zona, nomeadamente no ponto de extremidade ( $x = 2$  m), as amplitudes do modo de flexão e de corte atingem os seus valores máximos. Os modos de empenamento, modos 3, 4 e 5 continuam a apresentar valores residuais.

Em síntese, os modos 1 e 2 são os que mais participam na deformada da barra. Nas secções mais próximas do encastramento, a deformação deve-se sobretudo ao modo 2, de deformação por corte. Junto à região de meio vão os modos 1 e 2 têm amplitudes idênticas. Nas zonas mais afastadas do encastramento o modo de corte continua ser mais participativo

que o modo de flexão, contudo esta diferença já não é tão evidente e o modo de flexão parece estar a aproximar-se do de corte, para as secções mais extremas da viga e mais próximas do ponto de aplicação da carga. Os modos de empenamento, modos 3, 4 e 5, praticamente não participam. A análise destes gráficos vem corroborar o que já parecia notar-se na análise dos deslocamentos feita anteriormente: os modos 1 e 2 são os que realmente têm um peso determinante na deformada da barra e os restantes modos praticamente não participam. Isto mostra que a solução já é muito próxima da solução de elementos finitos de casca obtida com o programa ADINA, usando apenas 2 modos de deformação e que não existem vantagens significativas em utilizarem-se mais modos para a determinação dos deslocamentos.

### 5.3.3 Tensões

Os gráficos das figuras 5.21 e 5.22 mostram o andamento das tensões tangenciais em metade do banzo, parede 1. Na figura 5.21 mostram-se os resultados obtidos para os casos em que se consideraram a) 2 e b) 3 modos e na figura 5.22 mostram-se os casos em que se consideraram a) 5 e b) 7 modos de deformação. Os modos de deformação considerados, para o número total de modos utilizados, 7 modos, são os que estão explicitados em (5.4).

Se para a determinação dos deslocamentos não eram necessários muitos modos de deformação para se obterem soluções precisas, no caso da determinação das tensões tangenciais esse factor é fundamental. Conforme visto na secção 5.3.1 e confirmado pela participação modal na secção 5.3.2, são apenas necessários dois modos para se atingirem soluções com precisão aceitável (i.e. para as soluções obtidas com a GBT se aproximarem das soluções de elementos finitos de casca (ADINA)), o modo 1 de flexão e o modo 2 de corte, os restantes modos praticamente não participam. Contudo para o caso da determinação das tensões tangenciais, se se considerarem apenas 2 modos de deformação, as tensões tangenciais são nulas dado que para esses modos  $\gamma_{xy} = 0$  no banzo.

Ao aumentar-se o número de modos para 3, modo de flexão, modo de corte e modo de empenamento linear no banzo (metade do banzo devido à simplificação de simetria), o gráfico da figura 5.21 b) mostra que as tensões tangenciais obtidas já são de grau superior em relação à situação anterior (2 modos), i.e., são praticamente constantes. No entanto, esta solução ainda está muito longe de estar parecida com a fornecida pelo programa ADINA.

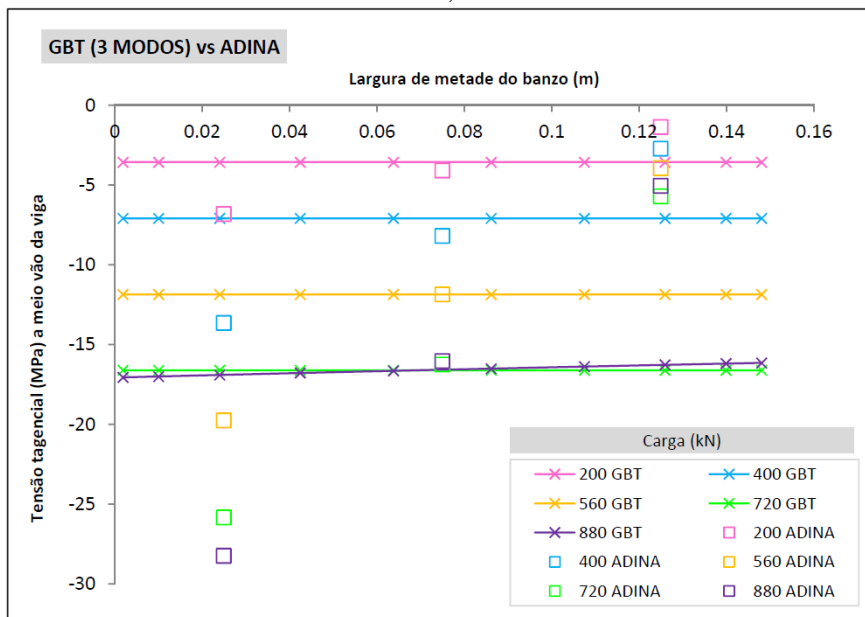
Ao considerar-se o modo 4, função sinusoidal com uma semi-onda em metade do banzo, as tensões tangenciais mudam drasticamente de aspecto e passam a estar agora mais próximas do resultado pretendido. O gráfico da figura 5.22 a) mostra a boa correlação que existe entre os resultados obtidos com a GBT para 4 modos e os obtidos com o modelo de elementos finitos de casca.

Finalmente, consideraram-se ainda mais dois modos, os modos 6 e 7, com duas e três semi-ondas em metade do banzo respectivamente. Os resultados obtidos com 7 modos estão apresentados no gráfico da figura 5.22 b) e mostram novamente a precisão da solução obtida com a GBT. Este gráfico quando comparado com o gráfico anterior, da figura 5.22 a), também permite concluir que não há um ganho significativo em considerarem-se mais modos para além dos quatro primeiros, uma vez que para esta situação já se obtém uma excelente precisão dos resultados fornecidos pela GBT em relação aos do modelo de elementos finitos de casca (ADINA).

Esta análise, de determinação das tensões tangenciais, mostra a importância que os modos de deformação têm nas análises feitas com a GBT. Se se pretender apenas determinar os deslocamentos, um número reduzido de modos de deformação, que tenham uma participação significativa na deformada da viga, são suficientes, mas o mesmo não é válido para as tensões



a)

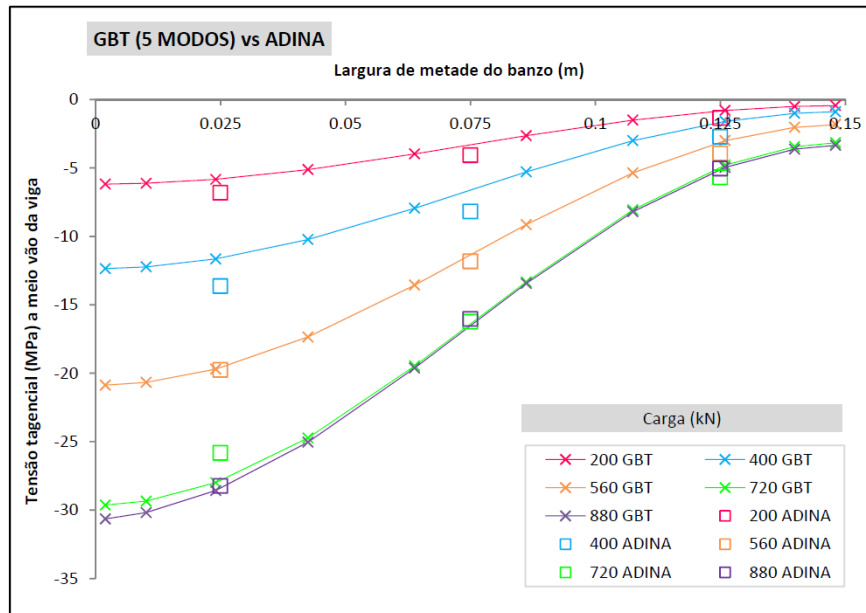


b)

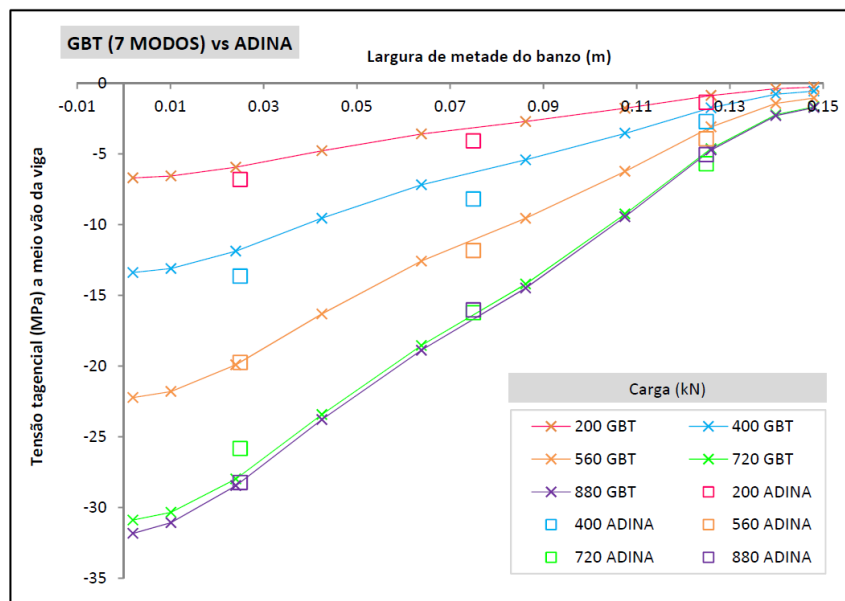
Figura 5.21: Tensões tangenciais no banzo com a) 2 e b) 3 modos de deformação

tangenciais, em que só funções com um grau superior, como as funções sinusoidais, são capazes de conduzir a soluções aceitáveis.





a)



b)

Figura 5.22: Tensões tangenciais no banzo com a) 5 e b) 7 modos de deformação



## Capítulo 6

# Conclusões e desenvolvimentos futuros

### 6.1 Conclusões

Na presente Dissertação procurou-se contribuir para o desenvolvimento da GBT através da formulação e implementação de elementos finitos de barra fisicamente não-lineares (geometricamente lineares). Consideraram-se dois tipos de elementos, com funções de interpolação de Lagrange (lineares) e Hermite (cúbicas), para os quais apenas se consideraram as componentes de membrana.

Os exemplos apresentados mostram as vantagens associadas à utilização destes elementos finitos, dado que conduzem a uma precisão elevada com um número reduzido de graus de liberdade. Em particular, analisaram-se dois exemplos: (i) consolas “longa” e “curta” com secção transversal rectangular de parede fina e (ii) uma consola com secção transversal em «I». Para o primeiro caso testaram-se elementos finitos de Lagrange e Hermite, enquanto que no segundo caso apenas se utilizaram elementos de Hermite. Os exemplos mostraram que a utilização de funções de Hermite conduz, em geral, a uma determinada precisão com um menor número de graus de liberdade (menos modos de deformação e/ou elementos finitos). Mostrou-se ainda que a utilização de modos de deformação baseados em funções de ordem superior (funções sinusoidais) pode conduzir a melhores resultados, quando comparada com a utilização da discretização clássica da GBT, baseada na subdivisão das paredes.

É importante referir ainda que os graus de liberdade e pontos de integração envolvidos na análise baseada na GBT são em número substancialmente inferior aos considerados na análise com elementos bidimensionais e de casca (ADINA). Por exemplo, no caso da consola com secção em «I», com apenas 4 elementos finitos e 2 modos de deformação, os resultados obtidos apresentam uma concordância excelente com os relativos ao modelo com elementos de casca. Deve salientar-se o facto da GBT permitir obter soluções com o mesmo grau de precisão, mas considerando um número significativamente inferior de graus de liberdade, o que resulta da adopção das hipóteses simplificativas: pequenos deslocamentos, inextensibilidade transversal das paredes, hipótese de Vlasov e hipótese de Kirchhoff. Ao contrário do que sucede com os métodos das faixas finitas ou dos elementos finitos bidimensionais e de casca, na GBT as rotações das paredes nos nós principais e intermédios não constituem graus de liberdade independentes.

## 6.2 Desenvolvimentos futuros

O primeiro desenvolvimento futuro deste trabalho consistiria naturalmente na formulação e implementação de uma formulação fisicamente não-linear que considerasse também os termos de flexão (para além dos termos de membrana). Contudo, esta formulação foi entretanto desenvolvida e implementada por Gonçalves *et al.* (2011). Assim sendo, o principal desenvolvimento será a formulação e implementação da versão geometricamente não-linear dos elementos finitos desenvolvidos neste trabalho. Tal formulação (geometricamente e fisicamente não-linear) será capaz de executar análises que até hoje só estão ao alcance dos elementos finitos de casca (elastoplásticos). Em particular, conseguir-se-ia reproduzir cargas de colapso de barras de parede fina com um custo computacional reduzido, o que é de grande interesse.

# Bibliografia

- Azevedo A. (1996). “Mecânica dos Sólidos”, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Departamento de Engenharia Civil, Secção de Estruturas.
- Baláz I. (1999). “Dünnwandige stäbe mit offenem oder geschlossenem deformierbaren querschnitt (*barras de parede fina com secção deformável, aberta ou fechada*)”. *Der Stahlbau*, **68**:70–77.
- Basaglia C., Camotim D. and Silvestre N. (2007). “Global buckling analysis of plane and space thin-walled frames in the context of GBT”, *Thin-Walled Structures* **46**, 79-101.
- Bathe K. J. (2005). *ADINA System* (versão 8.7), ADINA R&D Inc.
- Camotim D., Silvestre N., Gonçalves R. e Dinis, P. B. (2004a). “GBT analysis of thin-walled members: new formulation and applications”. In J. Loughlan (editor), *Thin-walled structures: recent advances and future trends in thin-walled structures technology*, pp. 137–168. Canopus Publishing, Bath, Reino Unido.
- Crisfield M. A. (1991). “Non-linear finite element analysis of solids and structures”. Volume 1: essentials. John Wiley Sons, Chichester, Inglaterra.
- Dinis P.B., Camotim D. e Silvestre N. (2005). “GBT formulation to analyse the buckling behaviour of thin-walled members with arbitrarily “branched” open cross-section”, *Thin-Walled Structures* **44**, 20-38.
- Gonçalves R. e Camotim D. (2004). “GBT local & global buckling analysis of aluminium and stainless steel columns”, *Comput. Struct. Vol. 82*, 1473-1484.
- Gonçalves R. e Camotim D. (2005). “Análise fisicamente não-linear de barras utilizando a teoria generalizada de vigas”, Aparicio J., Ferran A., Martins J., Gallego R. e Sá eds J., *Congreso de Métodos numéricos en Ingeniería*, Granada, SEMNI, Barcelona, 138.
- Gonçalves R. e Camotim D. (2007). “Thin-walled member plastic bifurcation analysis using Generalised Beam Theory”, *Adv. Eng. Softw. Vol. 38*, 637-646.
- Gonçalves R. (2007). “Análise de vigas de parede fina com secção deformável: novas formulações e aplicações”, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- Gonçalves R., Le Grogne P. e Camotim D. (2010). “GBT-based semi-analytical solutions for the plastic bifurcation of thin-walled members”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol 47, 34-50.
- Gonçalves R., Ritto-Corrêa M. e Camotim D. (2010). “A new approach to the calculation of cross-section deformation modes in the framework of Generalized Beam Theory”, *Comput. Mech.* Vol. 46, 759-781.

## Bibliografia

---

- Gonçalves R., Freitas I. e Camotim D. (2011). “Aplicação da teoria generalizada de vigas a barras com materiais elastoplásticos”, *Congresso de Métodos Numéricos em Engenharia*, Coimbra, APMTAC, Portugal.
- Gruttmann F., Sauer R. e Wagner W. (2000). “Theory and numerics of three-dimensional beams with elastoplastic material behaviour”. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**:1675–1702.
- Lourenço P. B. (1999). “Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não-linear”, Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho.
- Natal J. R. M. e Dinis L. M. J. S. (2004/2005). “Teoria da Plasticidade”, Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto.
- Silvestre N. e Camotim D. (2003). “Nonlinear generalized beam theory for cold-formed steel members”, *International Journal of Structural and Dynamics*, Vol. 3, No. 4, 461-490.
- Silvestre N. (2005). “Teoria generalizada de vigas: formulações, implementação numérica e aplicações”, Tese de Doutoramento, Universidade Técnica de Lisboa, Instituto Superior Técnico.
- Schardt R. (1966). Eine erweiterung der technische biegetheorie zur berechnung prismatischer faltwerke (uma extensão da teoria técnica de vigas para a análise de vigas prismáticas de parede fina). *Der Stahlbau*, **35**:161–171.
- Schardt R. (1989). “Verallgemeinerte technische biegetheorie (*teoria generalizada de vigas*)”. Springer-Verlag, Berlim, Alemanha.
- Schardt R. (1994a). “Generalized beam theory. An adequate method for coupled stability problems”. *Thin-Walled Structures*, **19**(2-4):161–180.
- Schardt R. (1994b). “Lateral Torsional and Distortional Buckling of Channel and Hat-Sections”. *Journal of Constructional Steel Research*, **31**(2-3):243–265.
- Silva N., Camotim D. e Silvestre N. (2008). “GBT cross-section analysis of thin-walled members with arbitrary cross-sections: a novel approach”, *Fifth International Conference on Thin-Walled Structures*, Brisbane, Australia.
- Simões da Silva L. e Simão P. (2002). “GBT—Teoria generalizada de peças lineares: aplicação a perfis metálicos enformados a frio com secção aberta”. *Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas*, **50**:49–65.
- Simão P. e Simões da Silva L. (2003). “Comportamento pós-bifurcacional de colunas metálicas enformadas a frio com secção de parede fina no contexto da GBT”. In J. Infante Barbosa (editor), *Actas do VII congresso de Mecânica Aplicada e Computacional*, vol. I, pp. 269–278, Évora.
- Vlasov V. (1958). “Tonkostenye sterjni (em russo)”. Fizmatgiz, Moscovo, Rússia, 2ª edição. Tradução francesa: «Pièces Longues en Voiles Mincees», Éditions Eyrolles, Paris, França, 1962.
- Waterloo Maple Inc. (2001). *MAPLE 12.0* (versão 12), University of Waterloo, Waterloo, Canadá.

Anexo A

Tabelas

## Anexo A. Tabelas

Tabela A.1: Consola longa com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange

### A) 3 Modos

Nº Modos=3						
Q	1EF	2EF	3EF	4EF	6EF	20EF
0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.00306	0.003813	0.003953	0.004002	0.004036	0.004062
1	0.00612	0.007626	0.007905	0.008003	0.008076	0.008139
1.5	0.009179	0.012288	0.013553	0.01392	0.014112	0.014272
2	0.012424	0.022003	0.024159	0.02479	0.025049	0.025419
2.5	0.018421	0.035845	0.037343	0.038189	0.038678	0.039158
3	0.027519	0.04969	0.051724	0.053002	0.053767	0.054244
3.5	0.039518	0.064078	0.067637	0.068537	0.069425	0.070098
4	0.051521	0.078875	0.083553	0.084489	0.085615	0.086373
4.5	0.063528	0.093872	0.099471	0.100982	0.102036	0.102876
5	0.076071	0.109163	0.115568	0.117477	0.11858	0.119541

### B) 4 Modos

Nº Modos=4						
Q	1EF	2EF	3EF	4EF	6EF	20EF
0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.003068	0.003822	0.003961	0.00401	0.004045	0.00407
1	0.006137	0.007643	0.007922	0.00802	0.008096	0.008158
1.5	0.009205	0.012325	0.013595	0.013961	0.014145	0.01429
2	0.012458	0.022016	0.024174	0.024804	0.025065	0.02544
2.5	0.018416	0.035862	0.037347	0.038205	0.038672	0.039175
3	0.027492	0.049712	0.051732	0.053006	0.053778	0.054265
3.5	0.039495	0.064133	0.067648	0.068559	0.069448	0.070118
4	0.051504	0.078926	0.083567	0.084516	0.085638	0.086397
4.5	0.063516	0.093902	0.099488	0.101024	0.102061	0.102903
5	0.076097	0.109148	0.115619	0.117537	0.118612	0.119588

### C) 5 Modos

Nº Modos=5						
Q	1EF	2EF	3EF	4EF	6EF	20EF
0	0	0	0	0	0	0
0.5	0.003069	0.003822	0.003962	0.00401	0.004045	0.004071
1	0.006138	0.007644	0.007923	0.008021	0.008097	0.008159
1.5	0.009207	0.012326	0.013594	0.013961	0.01415	0.014292
2	0.01246	0.02202	0.024177	0.024807	0.025081	0.025447
2.5	0.018415	0.035879	0.037363	0.038229	0.038689	0.039201
3	0.027519	0.049739	0.051767	0.053061	0.05382	0.054301
3.5	0.03956	0.064154	0.067709	0.068616	0.069488	0.070166
4	0.051604	0.078946	0.083654	0.08455	0.085698	0.086452
4.5	0.063648	0.093922	0.099601	0.101072	0.102132	0.102965
5	0.076177	0.109204	0.115681	0.117599	0.118691	0.119657



Tabela A.2: Consola longa com secção rectangular: elementos finitos de Hermite

A) 1 Modo				
Nº Modos=1				
Q	1EF	2EF	3EF	10EF
0	0	0	0	0
0.5	0.004018	0.004018	0.004018	0.004018
1	0.008036	0.008052	0.008053	0.008051
1.5	0.013726	0.01402	0.014146	0.014138
2	0.023322	0.025259	0.025186	0.025204
2.5	0.037479	0.038863	0.038866	0.038856
3	0.053205	0.053713	0.053821	0.053806
3.5	0.069661	0.069123	0.069545	0.069523
4	0.086064	0.085197	0.085603	0.08564
4.5	0.102467	0.101592	0.101961	0.102005
5	0.119202	0.118164	0.118368	0.118508

## Anexo A. Tabelas

Tabela A.3: Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Lagrange

### A) 3 Modos

Nº Modos=3						
Q	1EF	2EF	3EF	4EF	10EF	20EF
0	0	0	0	0	0	0
2	5,33E-05	6,05E-05	6,18E-05	6,23E-05	6,28E-05	6,28E-05
4	0,000107	0,000121	0,000124	0,000125	0,000126	0,000126
6	0,00016	0,000181	0,000185	0,000187	0,000188	0,000188
8	0,000213	0,000242	0,000248	0,00025	0,000254	0,000254
10	0,000267	0,000313	0,00033	0,000336	0,000341	0,000341
12	0,000321	0,000423	0,00045	0,000458	0,000467	0,000468
14	0,000391	0,00058	0,000604	0,000614	0,000627	0,000629
16	0,000499	0,00077	0,000796	0,000809	0,000823	0,000825
18	0,000673	0,000979	0,001012	0,001027	0,001042	0,001044
20	0,000908	0,001192	0,001249	0,001262	0,001279	0,001282

### B) 4 Modos

Nº Modos=4						
Q	1EF	2EF	3EF	4EF	10EF	20EF
0	0	0	0	0	0	0
2	5,75E-05	6,43E-05	6,56E-05	6,61E-05	6,66E-05	6,67E-05
4	0,000115	0,000129	0,000131	0,000132	0,000133	0,000133
6	0,000172	0,000193	0,000197	0,000198	0,0002	0,0002
8	0,00023	0,000257	0,000265	0,00027	0,000275	0,000275
10	0,000287	0,000338	0,000354	0,000363	0,000367	0,000368
12	0,000346	0,000447	0,000472	0,000477	0,000486	0,000487
14	0,000414	0,000596	0,000629	0,000633	0,000647	0,000649
16	0,000517	0,000826	0,000838	0,000863	0,000874	0,000875
18	0,000762	0,00108	0,001105	0,001118	0,001134	0,001136
20	0,001017	0,001342	0,001383	0,001391	0,001412	0,001414

### C) 5 Modos

Nº Modos=5						
Q	1EF	2EF	3EF	4EF	10EF	20EF
0	0	0	0	0	0	0
2	5.78E-05	6.47E-05	6.6E-05	6.65E-05	6.7E-05	6.7E-05
4	0.000116	0.000129	0.000132	0.000133	0.000134	0.000134
6	0.000174	0.000194	0.000198	0.000199	0.000201	0.000202
8	0.000231	0.000259	0.000267	0.000272	0.000276	0.000277
10	0.000289	0.000339	0.000355	0.000363	0.000367	0.000368
12	0.000347	0.000446	0.000474	0.000479	0.000487	0.000488
14	0.000414	0.000603	0.000631	0.000637	0.000651	0.000653
16	0.00051	0.000824	0.000838	0.000862	0.000872	0.000874
18	0.000766	0.00108	0.001108	0.00112	0.001137	0.001139
20	0.001023	0.001342	0.001387	0.001395	0.001415	0.001418

Tabela A.4: Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (1, 2 e 3 modos)

A) 1 Modo					
Nº Modos=1					
Q	1EF	2EF	3EF	10EF	50EF
0	0	0	0	0	0
2	3.81E-05	3.81E-05	3.81E-05	3.81E-05	3.81E-05
4	7.62E-05	7.62E-05	7.62E-05	7.62E-05	7.62E-05
6	0.000114	0.000114	0.000114	0.000114	0.000114
8	0.000153	0.000153	0.000153	0.000153	0.000153
10	0.000203	0.000205	0.000206	0.000206	0.000206
12	0.00027	0.000283	0.000285	0.000284	0.000284
14	0.000357	0.000387	0.000389	0.000389	0.000389
16	0.00048	0.000511	0.00051	0.00051	0.00051
18	0.000612	0.000641	0.00064	0.00064	0.00064
20	0.000759	0.000776	0.000778	0.000777	0.000777
B) 2 Modos					
Nº Modos=2					
Q	1EF	2EF	3EF	10EF	50EF
0	0	0	0	0	0
2	6.01E-05	6.14E-05	6.19E-05	6.26E-05	6.28E-05
4	0.00012	0.000123	0.000124	0.000125	0.000126
6	0.00018	0.000184	0.000186	0.000188	0.000188
8	0.000241	0.000247	0.000249	0.000253	0.000254
10	0.000313	0.000328	0.000335	0.000339	0.000341
12	0.000413	0.000448	0.000457	0.000465	0.000468
14	0.000557	0.000609	0.000618	0.000626	0.000629
16	0.000762	0.000799	0.000807	0.000819	0.000824
18	0.000986	0.001007	0.00102	0.001038	0.001044
20	0.00122	0.001233	0.001253	0.001274	
C) 3 Modos					
Nº Modos=3					
Q	1EF	2EF	3EF	10EF	
0	0	0	0	0	
2	6.38E-05	6.52E-05	6.57E-05	6.64E-05	
4	0.000128	0.00013	0.000131	0.000133	
6	0.000191	0.000196	0.000197	0.000199	
8	0.000258	0.000266	0.00027	0.000274	
10	0.000339	0.000356	0.000361	0.000366	
12	0.000438	0.000471	0.000475	0.000484	
14	0.000583	0.000639	0.000642	0.000647	
16	0.000822	0.000855	0.000861	0.000872	
18	0.001072	0.001101	0.001116	0.001131	
20	0.001345	0.001371	0.001389	0.001407	

Tabela A.5: Consola curta com secção rectangular: elementos finitos de Hermite (4 modos)

D) 4 Modos				
Nº Modos=4				
Q	1EF	2EF	3EF	10EF
0	0	0	0	0
2	6.41E-05	6.56E-05	6.61E-05	6.68E-05
4	0.000128	0.000131	0.000132	0.000134
6	0.000192	0.000197	0.000198	0.000201
8	0.000259	0.000268	0.000271	0.000275
10	0.000341	0.000355	0.000361	0.000366
12	0.000438	0.000472	0.000476	0.000485
14	0.000585	0.00064	0.000645	0.00065
16	0.000822	0.000851	0.000858	0.000869
18	0.001073	0.001103	0.001118	0.001132
20	0.001347	0.001373	0.001392	0.001411

## Anexo B

# Rotinas desenvolvidas no programa MAPLE

### B.1 Procedimento para calcular a matriz de rigidez tangente (para a 1ª iteração)

```
CalcularKt:=proc()
```

```
local Ke, Keponto, KG, ii, iii, PosX, PosY, i, j, Peso, n, salto, n2:  
global Kt, d, Cct, C, ponto;
```

```
KG:=array(symmetric,sparse,1..nno*Npsi/2*N,1..nno*Npsi/2*N):
```

```
for n from 1 to ne do
```

```
    Ke:=array(sparse,1..N*Npsi,1..N*Npsi):
```

```
    for n2 from 1 to np do
```

```
        for ii from 1 to NgaussX do
```

```
            for iii from 1 to NgaussY do
```

```
                PosX:=eval((1+Gauss(NgaussX)[1,ii])*l/2):
```

```
                PosY:=eval((1+Gauss(NgaussY)[1,iii])*b(n2)/2):
```

```
                Peso:=eval(Gauss(NgaussX)[2,ii]*Gauss(NgaussY)[2,iii]):
```

```
                Keponto:=evalm(Peso*l*esp(n2)*b(n2)/4*(evalf(eval(APsiT(n2),  
                    x=PosX,y=PosY))&*C&*evalf(eval(APsi(n2),x=PosX,y=PosY)))):
```

```
                Ke:=evalm(Ke+Keponto):
```

```
            od:
```

```
        od:
```

```
    od:
```

```
    salto:=Npsi/2*N*(n-1):
```

```
    for i from 1 to N*Npsi do
```

```
        for j from i to N*Npsi do
```

```
            KG[i+salto,j+salto]:=KG[i+salto,j+salto]+Ke[i,j]:
```

```
        od:
```

```
    od:
```

```
od:
```

```
Kt:=evalm(KG);
```

```
for i from NGLe/2 to 1 by -1 do
```

```

    if apoios[i]=1 then Kt:=eval(delrows(delcols(Kt,i..i),i..i)):fi:
od:
end:

```

## B.2 Procedimento para calcular a matriz de rigidez tangente e calcular o vector das forças equivalentes

```

CalcularKtQ:=proc()

local Ee, Qe, Qeponto, QG, Ke, Keponto, KG, S, ii, iii, PosX, PosY, i, j,
Peso, n, salto, n2, aux1, aux2:
global Q, Kt, d, Cct, C, ponto, dadosDeltaE;

QG:=array(sparse,1..nno*N*Npsi/2,1..1):
KG:=array(symmetric,sparse,1..nno*N*Npsi/2,1..nno*N*Npsi/2):
S:=array(sparse,1..3,1..1):

for n from 1 to ne do
    Ke:=array(sparse,1..N*Npsi,1..N*Npsi):
    Qe:=array(sparse,1..N*Npsi,1..1):
for n2 from 1 to np do
    aux1:=((n-1)*N*Npsi/2+1):
    aux2:=aux1+N*Npsi-1:
    Ee:=multiply(APsi(n2),submatrix(d,aux1..aux2,1..1));
    for ii from 1 to NgaussX do
        for iii from 1 to NgaussY do
            ponto:=iii+(ii-1)*NgaussY+(n2-1)*NgaussX*NgaussY+
                +(n-1)*np*NgaussX*NgaussY:
            PosX:=eval((1+Gauss(NgaussX)[1,ii])*1/2):
            PosY:=eval((1+Gauss(NgaussY)[1,iii])*b(n2)/2):
            Peso:=eval(Gauss(NgaussX)[2,ii]*Gauss(NgaussY)[2,iii]):
            dadosDeltaE[ponto,1]:=evalf(eval(Ee[1,1],
                x=PosX,y=PosY)-dadosE[ponto,1]):
            dadosDeltaE[ponto,2]:=0:
            dadosDeltaE[ponto,3]:=evalf(eval(Ee[3,1],
                x=PosX,y=PosY)-dadosE[ponto,3]):

            CalcularTens():
            CalcularCct():
            Keponto:=evalm(Peso*1*esp(n2)*b(n2)/4*(evalf(eval(APsiT(n2),
                x=PosX,y=PosY))*Cct&*evalf(eval(APsi(n2),x=PosX,y=PosY)))):

            Ke:=evalm(Ke+Keponto):
            S[1,1]:=dadosSi[ponto,1]:
            S[2,1]:=dadosSi[ponto,2]:
            S[3,1]:=dadosSi[ponto,3]:
            Qeponto:=evalm(Peso*1*esp(n2)*b(n2)/4*(evalf(eval(APsiT(n2),
                x=PosX,y=PosY))*S)):
            Qe:=evalm(Qe+Qeponto):
        od:
    end:
end:

```

```

od:
od:
salto:=Npsi/2*N*(n-1):
for i from 1 to N*Npsi do
  QG[i+salto,1]:=QG[i+salto,1]+Qe[i,1]:
  for j from i to N*Npsi do
    KG[i+salto,j+salto]:=KG[i+salto,j+salto]+Ke[i,j]:
  od:
od:
od:
Kt:=evalm(KG);
for i from NGL/2 to 1 by -1 do
  if apoios[i]=1 then Kt:=eval(delrows(delcols(Kt,i..i),i..i)): fi:
od:
Q:=evalm(QG);
for i from NGL/2 to 1 by -1 do
  if apoios[i]=1 then Q:=eval(delrows(Q,i..i)): fi:
od:
end:

```

### B.3 Dados e características do problema

Pesos de Gauss:

[1ª linha posições normalizadas],[2ª linha pesos de Gauss]

```

Gauss(1):=array([[0],[2]]):
Gauss(2):=array([[-0.5773502692,0.5773502692],[1,1]]):
Gauss(3):=array([[-0.7745966692,0,0.7745966692],
  [0.5555555556,0.8888888889,0.5555555556]]):
Gauss(4):=array([[-0.8611363116,-0.3399810436,0.3399810436,0.8611363116],
  [0.3478548451,0.6521451549,0.6521451549,0.3478548451]]):
Gauss(5):=array([[-0.9061798459,-0.5384693101,0,0.5384693101,0.9061798459],
  [0.2369268851,0.4786286705,0.5688888889,0.4786286705,0.2369268851]]):
Gauss(6):=array([[-0.932469514203152,-0.661209386466265,-0.238619186083197,
  0.238619186083197,0.661209386466265,0.932469514203152],
  [0.171324492379170,0.360761573048139,0.467913934572691,
  0.467913934572691,0.360761573048139,0.171324492379170]]):
Gauss(7):=array([[-0.9491079123,-0.7415311856,-0.4058451514,0,
  0.4058451514,0.7415311856,0.9491079123],
  [0.1294849662,0.2797053915,0.3818300505,0.4179591837,
  0.3818300505,0.2797053915,0.1294849662]]):
Gauss(10):=array([[-0.9739065285171717200779640,-0.8650633666889845107320967,
  -0.6794095682990244062343274,-0.4333953941292471907992659,
  -0.1488743389816312108848260,0.1488743389816312108848260,
  0.4333953941292471907992659,0.6794095682990244062343274,
  0.8650633666889845107320967,0.9739065285171717200779640],

```

## Anexo B. Rotinas desenvolvidas no programa MAPLE

---

```
[0.0666713443086881375935688,0.1494513491505805931457763,  
0.2190863625159820439955349,0.2692667193099963550912269,  
0.2955242247147528701738930,0.2955242247147528701738930,  
0.2692667193099963550912269,0.2190863625159820439955349,  
0.1494513491505805931457763,0.0666713443086881375935688]]):
```

Nº de pontos de Gauss nas duas direcções:

```
NgaussX:=3:  
NgaussY:=10:
```

Propriedades do material:

```
E:=210e6;    Módulo de Elasticidade  
nu:=.3;    Coeficiente de Poisson  
G:=E/2/(1+nu):    Módulo de distorção  
C:= array([[E, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, G]]);    Matriz Constitutiva  
S0:=235000:    Tensão de Cedência  
Et:=50*106; H:= Et/(1 - Et/E):    Et, Endurecimento  
Cct := array([[0, 0, 0], [0, 0, 0], [0, 0, 0]]);    Matriz constitutiva  
tangente consistente  
tolS:=0.01:    Tolerância para considerar um ponto na sup. Cedência
```

Discretização:

```
ne:=3;    ne, nº de elementos  
nno:=ne+1;    nno, nº de nós  
np:=2;    np, nº de paredes  
l:=evalf(2.0/ne);    l, largura do elemento
```

Geometria da secção:

```
Dimensões do Perfil:  
Hp:=0.490;    Altura do perfil  
B:=0.3;    Largura dos banzos  
tf:=0.023;    Espessura do banzo  
tw:=0.007;    Espessura da Alma  
Dimensões das paredes:  
b(1):=B/2;    Parede Banzo - Parede (1)  
b(2):=Hp/2;    Parede Alma - Parede (2)  
esp(1):=tf;    Espessura do banzo  
esp(2):=tw/2;    Espessura da Alma em relação à linha média
```

Modos de deformação:

```
Número de modos (N):  
N:=5;  
Definição dos modos:  
u(1):= array([[b(2)], [0], [y], [sin((Pi*y)/b(1))], [0]]);    Banzo
```



```
u(2):= array([[b(2)-y], [0], [0], [0], [sin((Pi*y)/b(2))]]); Alma
v(1):= array([[0], [0], [0], [0], [0]]); Banzo
v(2):= array([[1], [1], [0], [0], [0]]); Alma
```

Número de graus de liberdade do elemento (NGLe):

```
NGLe:= Npsi*N;
```

Força F aplicada na ponta da consola:

```
fx:=0; fy:=.25;
```

Funções de aproximação:

Nº de Funções de aproximação(NPsi):

```
Npsi:=4;
```

Definição das Funções de aproximação(Psi):

```
psi1 := 2*(x/l)3 - 3*(x/l)2 + 1:
```

```
psi2 := 1*((x/l)3 - 2*(x/l)2 + x/l):
```

```
psi3:= -2*(x/l)3 + 3*(x/l)2:
```

```
psi4:= 1*((x/l)3 - (x/l)2):
```

```
psi5:=16/3*x2*(l-x)2/l3:
```

Definição da Matriz psi:

```
psia:= Matrix(N,Npsi/2*N):
```

```
psib:= Matrix(N,Npsi/2*N):
```

```
for i from 1 to N do
```

```
    psia[i,i*2-1]:= psi1:
```

```
    psib[i,i*2]:= psi2:
```

```
od:
```

```
for i from 1 to N do
```

```
    if i>=3 then psib[i,i*2-1]:= psi5 else psib[i,i*2-1]:= psi3:
```

```
    end if;
```

```
    psib[i,i*2]:= psi4:
```

```
od:
```

```
psi := concat(psia,psib);
```

## B.4 Ciclo incremental-iterativo:

```
Tempo:=array([0,100,200,300,400,480,560,640,720,800,880]); vector do
```

```
pseudo-tempo (multiplicador de F)
```

```
Incrementos:=11: nº de incrementos
```

```
tol:=.001*fy: tolerância para convergência
```

```
n2:=2:
```

Vector das cargas exteriores elementar:

```
Fe:=eval(transpose(Psix)*(u(n2)*fx)+multiply(transpose(psi),(v(n2)*fy)),
```

```
x=l,y=b(n2)/2):
```

Vector das cargas exteriores global:

## Anexo B. Rotinas desenvolvidas no programa MAPLE

---

```
FG:=array(sparse,1..(nno*N*Npsi/2),1..1): for i from 1 to rowdim(Fe) do
FG[(ne-1)*N*Npsi/2+i,1]:=Fe[i,1]: od:
F:=evalm(FG):
  for i from NGL/2 to 1 by -1 do
    if apoios[i]=1 then F:=eval(delrows(F,i..i)): fi:
  od:
d0:=array(sparse,1..(nno*N*Npsi/2),1..1):      inicializar deslocamentos
d:=array(sparse,1..(nno*N*Npsi/2),1..1):

Ciclo de incrementos:
for i from 2 to Incrementos do
  t:=Tempo[i]: t0:=Tempo[i-1]:
  DF:=evalm((t-t0)*F): delta cargas incrementais
  dF:=evalm(DF): delta cargas iterativas (=incrementais na 1ª iteração)
  CalcularKt(): calcular matriz de rigidez tangente para a 1ª iteração
  erro:=tol+1:

Ciclo de iterações:
for it from 1 to 100 while erro>tol do
  dd:=evalm(inverse(Kt)*dF):
  aux:=array(sparse,1..nno*N*Npsi/2,1..1): contador:=1: rotina para repor
linhas no vector deslocamentos
  for ii from 1 to NGL/2 do
    if apoios[ii]=0 then aux[ii,1]:=dd[contador,1]: contador:=contador+1:
  fi:
  od:

copyinto(submatrix(dd,contador..contador+(nno-1)*NGL/2-1,1..1),aux,NGL/2+1,1):
  dd:=evalm(aux):
  d:=evalm(d+dd): deslocamentos totais para calcular deformação
  CalcularKtQ(): calcular o vector das forças e a matriz de rigidez
tangente para a próxima iteração
  dF:=evalm(t*F-Q): correcção para a próxima iteração
  erro:=norm(dF,frobenius): erro é a norma da correcção
print("iteração =", it, "erro =", erro);
  od: fim iterações

dadosS:=evalm(dadosSi): actualizar tensões
dadosE:=evalm(dadosE+dadosDeltaE): actualizar deformações
d0:=evalm(d): actualizar deslocamentos
  for j from 1 to ne*NgaussX*NgaussY do actualizar deformação plástica e
zerar deformação plástica iterativa
    dadosD[j,1]:=dadosD[j,1]+dadosD[j,2]: dadosD[j,2]:=0:
  od:

  print("tempo =", t, "iterações =", it-1, "erro =", erro, "Q =", Q, "t*F",
evalm(t*F), "d", d);
  print(d[rowdim(d)-9,1]+d[rowdim(d)-8,1]);

Deslocamentos da extremidade da consola:
```

```
phi:=multiply(psi,submatrix(d,rowdim(d)-N*Npsi+1..rowdim(d),1..1));  
od:      fim incrementos
```